MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA 2007/2008

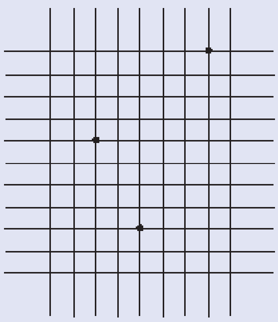
KATEGÓRIA Z4

Z4-I-1
Z päťciferných čísel 53 827 a 19 763 vyškrtni spolu dve číslice tak, aby súčet vzniknutých čísel bol čo najväčší.
(M. Dillingerová)

Z4-I-2
Na pomarančovú limonádu potrebujeme šťavu z ôsmich pomarančov, dvoch citrónov, 2 čajové lyžičky cukru a 6 decilitrov vody. Do džbánu sme si naliali 9 decilitrov vody. Koľko musíme odšťaviť pomarančov, citrónov, koľko pridať lyžičiek cukru, aby sme dostali rovnako kvalitnú limonádu?
(S. Bodláková)

Z4-I-3
Na drevenom plote je 70 latiek. Paľko s Aničkou ich mali všetky ponatierať farbou. Začali aj skončili obaja naraz. Kým Anička natrela dve latky, prešli 4 minúty a za 8 minút stihol Paľko ponatierať 3 latky. Ako dlho im trvalo natretie všetkých latiek?
(M. Dillingerová)

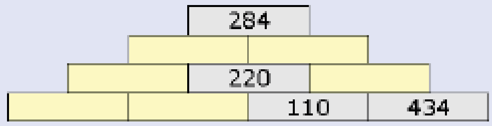
Z4-I-4
Na obrázku s časťou štvorčekovej siete sú vyznačené tri body. Každé dva z tých troch vyznačených bodov tvoria vždy dva zo



štyroch vrcholov nejakého štvorca. Štvorec KAMI je najmenší z nich, ale z obrázku sa nám vymazali mená vyznačených bodov. Dokresli do štvorčekovej siete celý štvorec KAMI.
(M. Dillingerová)

Z4-I-5
Martin a Jana si porovnávali svoje Mikulášske balíčky. Mali tam nasypané aj svoje obľúbené čokoládky. Martin ich však mal iný počet ako Jana, tak venoval štvrtinu svojich čokoládok Jane. Jana si všetky svoje prepočítala a polovicu z nich venovala naspäť Martinovi. Potom Martin zase venoval štvrtinu svojich Jane. Po následnom prepočítaní zistili, že majú obaja po 9 čokoládok. Koľko čokoládok mal Martin pôvodne v balíčku? Koľko ich tam mala Jana? (Počas počítania a presúvania ani jednu čokoládku nezjedli.)
(M. Dillingerová)

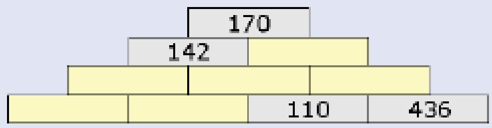
Z4-I-6
Doplň na prázdne tehličky pyramídy znázornenej na obrázku chýbajúce čísla tak, aby platilo: na každej tehličke (okrem tých z najspodnejšieho riadku) je napísané číslo, ktoré sa rovná polovici súčtu čísel napísaných na dvoch s ňou susediacich tehličkách z nižšieho riadku.



(S. Bednářová)

KATEGÓRIA Z5

Z5-I-1
Náš kuchynský stôl má obdĺžnikovú vrchnú dosku s rozmermi 90 cm × 140 cm. Chceme naň ušiť obrus tak, aby na každej strane stola presahoval rovnako.
a) Koľko látky šírky 140 cm treba kúpiť, aby sme ju už nemuseli ďalej strihať?
b) Koľko cm bude tento obrus na každej strane presahovať?



(S. Bednářová)

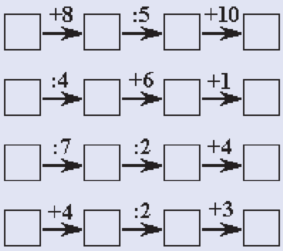
Z5-I-2
Doplň na prázdne tehličky pyramídy znázornenej na obrázku chýbajúce čísla tak, aby platilo: na každej tehličke (okrem tých z najspodnejšieho riadku) je napísané číslo, ktoré sa rovná polovici súčtu čísel napísaných na dvoch s ňou susediacich tehličkách z nižšieho riadku.
(S. Bednářová)

Z5-I-3
V škôlke majú stavebnicu pozostávajúcu z rovnako veľkých molitanových kvádrov. Keď ich deti všetky položia na seba, poskladajú ich vždy tak, aby na sebe ležali kvádre rovnakými stenami a žiadnom „poschodí" neboli kvádre dva. Takto sa im postupne podarilo postaviť tri rôzne vysoké veže. Prvá mala 120 cm, druhá 150 cm a tretia 130 cm. Koľko kvádrov mohla mať stavebnica, z ktorej stavali?
(M. Dillingerová)

Z5-I-4
Trojčatá práve oslávili svoje tretie narodeniny. O päť rokov bude súčet ich vekov rovný dnešnému veku ich mamy. Koľko rokov bude mať ich mama o 5 rokov?
(M. Krejčová)

Z5-I-5
Číslo sa nazýva PREFÍKANÉ, ak počnúc jeho treťou číslicou (počítané zľava) platí, že každá jeho číslica je súčtom všetkých číslic ležiacich naľavo od nej.
a) Napíšte dve najväčšie PREFÍKANÉ čísla.
b) Koľko je všetkých štvorciferných PREFÍKANÝCH čísel?
(S. Bednářová)

Z5-I-6
Doplň do prázdnych políčok prirodzené čísla od 1 do 16 (každé číslo môžeš použiť len raz) tak, aby platili matematické vzťahy.



(M. Smitková)

KATEGÓRIA Z6

Z6-I-1
Jurko kúpil dve čokolády v obchode oproti škole. Miško si kúpil také isté dve čokolády v obchode za školou a Ivan si kúpil tiež takú čokoládu, ale v školskom bufete. Spolu potom zistili, že priemerne ich spolu vyšla jedna čokoláda na 19,70 Sk. Takýmto spôsobom boli všetky tri nákupy spolu o 6 Sk drahšie, ako keby chlapci nakupovali všetkých 5 čokolád v obchode oproti škole a o 6,50 Sk lacnejšie, ako keby nakúpili iba v obchode za školou. Koľko stáli čokolády v jednotlivých obchodoch?

(M. Dillingerová)

Z6-I-2
Miško mal farebné nálepky v tvare rovnoramenných pravouhlých trojuholníkov dvoch veľkostí. Prvý druh mal ramená dĺžky 5 cm, tých bolo 9. Druhý druh mal najdlhšiu stranu dĺžky 10 cm a týchto nálepiek bolo 17. Najmenej koľko nálepiek prvého druhu si má Miško ešte dokúpiť, aby svojimi nálepkami mohol úplne oblepiť (zakryť) steny kocky s hranou dĺžky 10 cm?

(M. Dillingerová)

Z6-I-3
V rovine majú ležať body A, B, C, D tak, aby platilo: |AB| = 7 cm, |BC| = 8 cm, |CD| = 5 cm a |DA| = 9 cm.
a) Urči najväčšiu možnú vzdialenosť bodov A a C.
b) Urči najmenšiu možnú vzdialenosť bodov A a C.

(L. Šimůnek)

Z6-I-4
Pri chudokrvnosti sa odporúča piť mrkvovo-cviklovú šťavu, pričom cviklová šťava má predstavovať len 1/5 z objemu nápoja. Z dvoch kg mrkvy získame v odšťavovači 7,5 dl šťavy, z edného kg cvikly 6 dl šťavy.
a) Aké množstvo mrkvy potrebujeme na 25 dag cvikly, aby sme získali správne namiešanú mrkvovo-cviklovú šťavu?
b) Aké množstvo mrkvovo-cviklovej šťavy takto získame?

(S. Bednářová)

Z6-I-5
Ak povie mimozemšťan v rozhovore o Vianociach „haf quin lina“, znamená to „veľké zlaté hviezdy“; ak „kari lina mejk“, znamená to „blikajúce zlaté kolieska“; ak „esca haf kari“, znamená to „veľké červené kolieska“. Ako sa povie „blikajúce hviezdy“ ? (Zapíš svoju úvahu.)

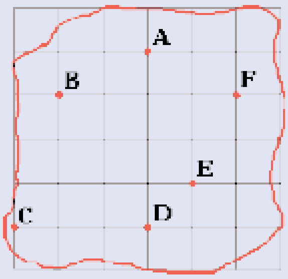
(M. Volfová)

Z6-I-6
Z trojciferných čísel 532 a 179 vyškrtni spolu dve číslice tak, aby súčin vzniknutých čísel bol čo najväčší.

(M. Dillingerová)

KATEGÓRIA Z7

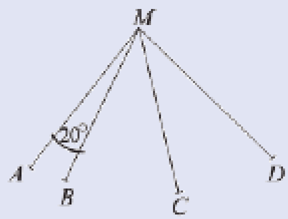
Z7-I-1
Číslo nazveme trochu nešťastné, ak je násobkom čísla 13. Číslo, ktoré je násobkom čísla 17, nazveme trochu usmievavé. Vezmime všetky prirodzené čísla od 1 do 1 000 000, ktoré nekončia ani 0 ani 5. Koľko z nich je trochu nešťastných a zároveň trochu usmievavých?



(M. Volfová)

Z7-I-2
Vláda Tramtárie sa rozhodla, že svoje územie rozdelí na šesť krajov. Vybrala preto šesť najvýznamnejších miest (krajské mestá) a každému chce priradiť kraj podľa nasledujúceho pravidla: každé miesto v krajine patrí do kraja toho krajského mesta, ku ktorému to má vzdušnou čiarou najbližšie. Prekreslite si vo vhodnej mierke mapu Tramtárie a narysujte do nej hranice krajov.
(Krajské mestá sú označené písmenami A – F, hrubá čiara označuje hranice Tramtárie. Štvorcová sieť má iba uľahčovať orientáciu na mape a žiadnym spôsobom neovplyvňuje hranice krajov!)

(L. Šimůnek)



Z7-I-3
O dvanástej stáli na parkovisku české, nemecké a francúzske autá v pomere: české k nemeckým 9:4, nemecké k francúzskym 2:3. V priebehu hodiny odišlo jedenásť a prišlo päť českých áut, odišlo jedno a prišlo jedenásť nemeckých áut a odišli tri a prišlo šesť francúzskych áut. Aký je pomer českých, nemeckých a francúzskych áut stojacich o 13:00 na parkovisku, ak o 12:00 tam bolo dvanásť francúzskych áut?

(Š. Ptáčková)

Z7-I-4
Úsečky AM, BM, CM a DM usporiadané ako na obrázku sú rovnakej dĺžky. Uhly, ktoré zvierajú, majú veľkosti 20°, 20°, 50°, 50°, 70° a α. Zisti veľkosť uhla, ktorý zvierajú priamky AB a CD.
(Obrázok je nepresný, nevyplatí sa ti merať.)

(M. Raabová)

Z7-I-5
Všetky políčka na šachovnici 4×4 vyfarbite štyrmi rôznymi farbami a vpíšte do nich písmená L, E, T, O tak, aby v každom riadku aj v každom stĺpci boli zastúpené všetky farby aj všetky písmená. Každé políčko bude celé jednofarebné a bude obsahovať práve jedno písmeno.
Každé písmeno musí byť napísané na políčku každej farby a na každej farbe musia byť postupne umiestnené všetky písmená. Nájdi jedno riešenie.

(M. Volfová)

Z7-I-6
Na papieri je napísaných niekoľko po sebe idúcich prirodzených čísel. Je medzi nimi 12 takých, ktoré sú násobkom piatich a 10 takých, ktoré sú násobkom siedmich.
a) Koľko prirodzených čísel je napísaných na papieri?
b) Nájdite jednu postupnosť prirodzených čísel, ktorá odpovedá vyššie opísaným podmienkam.

(L. Šimůnek)

KATEGÓRIA Z8

Z8-I-1
Nájdite všetky štvorciferné čísla deliteľné tromi, ktoré po vynásobení číslom 17 dávajú číslo končiace trojčíslím 519.

(L. Hozová)

Z8-I-2
Nájdite všetky trojice prirodzených čísel menších ako 10, pre ktoré platí, že ich súčin je sedemnásobok ich súčtu.

(L. Hozová)

Z8-I-3
Jano si kúpil sedemmíľové čižmy. Jeho kamarát Honza z Čiech si kúpil lietajúci koberec. Potom sa obaja zúčastnili na rozprávkových 12-hodinových pretekoch. Počas pretekov boli hladní, a tak sa obaja zastavili najesť. Jedenie každému trvalo hodinu. Keby sa Honza nezastavil na „vepřo-knedlo-zelo“, predbehol by Jana o 51 rozprávkových míľ. Keby sa Jano nezastavil na bryndzové halušky, predbehol by Honzu o 28 rozprávkových míľ. Ako ďaleko od seba by skončili, keby nejedol ani jeden z nich? Kto z nich by bol prvý?

(M. Dillingerová)

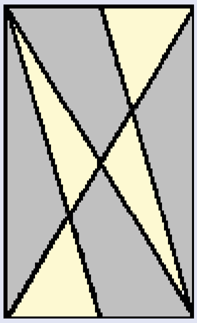
Z8-I-4
V Tramtárii majú 5 lekárskych fakúlt, z ktorých každá môže do prvého ročníka prijať presne 200 študentov. Prijímacie skúšky na jednotlivé fakulty sa konajú v rôzne dni, preto si študenti môžu podať prihlášku na viacero fakúlt. Pýtali sme sa na fakultách, koľko im prišlo prihlášok na školský rok 2007/2008. Získali sme tieto odpovede:

1. fakulta: „Dostali sme päťkrát viac prihlášok, ako sme mali voľných miest.“
2. fakulta: „U nás počet uchádzačov prevýšil kapacitu o 320%.“
3. fakulta: „Na našu fakultu sa hlásilo o 520 uchádzačov viac, ako sme mali miest.“
4. fakulta: „U nás na každé voľné miesto pripadli v priemere 3 prihlášky.“
5. fakulta: „K nám sa hlásilo o tri štvrtiny záujemcov viac, ako sme mali miest.“

V akademickom roku 2007/2008 nakoniec štúdium začalo 1000 medikov. Zo štatistiky vyplýva, že záujemca o štúdium medicíny podal na lekárske fakulty v priemere 2,5 prihlášky. Koľko záujemcov sa nedostalo na žiadnu z lekárskych fakúlt Tramtárie?

(L. Šimůnek)

Z8-I-5
Pán Poleno a pán Čriepok vyrábali vchodové dvere tvaru obdĺžnika s obsahom 3 m². Rám, uhlopriečky a dve ďalšie priečky, ktoré spájali vrcholy obdĺžnika so stredmi protiľahlých strán



boli z kovových tyčí (pozri obrázok). Pán Poleno vyplnil drevom štyri tmavé časti dverí a pán Čriepok zostávajúce časti dverí zasklil. Koľko metrov štvorcových dreva potreboval pán Poleno na výplň dverí?
(Hrúbku kovových tyčí zanedbajte.)

(L. Hozová)

Z8-I-6
Uprostred námestia v Kocúrkove je štvorcový trávnatý záhon. Keď Kocúrkovčania zistili, že zabudli urobiť chodník, tak z každého kraja záhonu naň ubrali 2 metre. Pred položením zámkovej dlažby (a štrku pod ňu) bolo treba pod celú plochu chodníka urobiť 0,5 m hlboký výkop. Odkopaním trávy a hliny sa záhon zmenšil o 1200 m2.
a) Aký obsah má teraz trávnatý záhon?
b) Koľko m3 štrku je pod dlažbou, ak je povrch dlažby zarovno s trávnatým záhonom a výška dlaždice je 8 cm?

(M. Smitková, M. Dillingerová)

KATEGÓRIA Z9

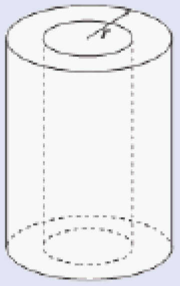
Z9-I-1
Nájdite všetky štvorciferné čísla končiace číslicou 9, ktoré sú deliteľné každou svojou číslicou.

(P. Tlustý)

Z9-I-2
Peter sa pýtal babičky, koľko rokov má dedko. Babička mu takto odpovedala: „To vieš, už dávno nemáme päťdesiat, ale zato ešte nemáme osemdesiat rokov. Ak vynásobíš súčet môjho a dedkovho veku ich rozdielom a k výsledku pripočítaš oba naše veky, dostaneš 492.“
„Aha,“ povedal po chvíli Peter, „tak to má dedko ...“
Koľko rokov má Petrov dedko, ak viete, že je starší ako Petrova babička?

(M. Raabová)

Z9-I-3



Stredom rotačného valca s výškou v a podstavou, ktorej polomer je r, bol vyvŕtaný valcový otvor. Objem takto vytvoreného „dutého valca" je polovičný ako objem pôvodného valca. Vyjadrite hrúbku steny dutého valca pomocou polomeru r.

(M. Krejčová)

Z9-I-4

Minulú divadelnú sezónu sa predávali vstupenky za jednotnú cenu 160 Sk. Pre tohtoročnú sezónu sa sedadlá v hľadisku rozdelili do dvoch kategórií. Miesta I. kategórie stoja 180 Sk a miesta II. kategórie 155 Sk. Ak sa všetky sedadlá v hľadisku vypredajú, bude celková tržba rovnaká ako minulú sezónu pri vypredanom hľadisku. Riaditeľ divadla stále nie je spokojný a pre budúcu sezónu plánuje zmenu: z najhorších miest súčasnej II. kategórie urobí III. kategóriu. Aby sa však tržba za vypredané hľadisko nezmenila, tak rozhodol, že vstupenky budú stáť 180 Sk (I. kategória), 160 Sk (II. kategória) a 130 Sk (III. kategória). V akom pomere budú v budúcej sezóne počty sedadiel jednotlivých kategórií?

(L. Šimůnek)

Z9-I-5

Jurko kúpil dve čokolády v obchode oproti škole. Miško si kúpil také isté dve čokolády v obchode za školou a Ivan si kúpil tiež takú čokoládu, ale v školskom bufete. Takýmto spôsobom boli všetky tri nákupy spolu o 6 Sk drahšie, ako keby chlapci nakupovali všetkých 5 čokolád v obchode oproti škole a o 6,50 Sk lacnejšie, ako keby nakúpili iba v obchode za školou. V školskom bufete predávajú jednu čokoládu za 19,50 Sk. Koľko stáli všetky čokolády spolu? Koľko stojí čokoláda v obchode za školou?

(M. Dillingerová)

Z9-I-6

V rovine je daný štvoruholník ABCD. Zostrojte bod K, ktorý je vrcholom rovnobežníka BCDK, a bod L, ktorý je vrcholom rovnobežníka CDAL. Ukážte, že priamka KL prechádza stredom strany AB daného štvoruholníka ABCD.

(J. Švrček)

KATEGÓRIA C

1. Určte najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré aj čísla $\sqrt{2n}$, $\sqrt[3]{3n}$, $\sqrt[5]{5n}$ sú prirodzené.

(Jaroslav Švrček)

2. Štvoruholníku $ABCD$ je vpísaná kružnica so stredom S. Určte rozdiel $|\angle ASD| - |\angle CSD|$, ak $|\angle ASB| - |\angle BSC| = 40^0$.

(Jaromír Šimša)

3. Máme určitý počet krabičiek a určitý počet guľôčok. Ak dáme do každej krabičky práve jednu guľôčku, ostane nám n guľôčok. Ak ale dáme n krabičiek na bok, môžeme všetky guľôčky rozmiestniť do zostávajúcich krabičiek tak, že v každej ich bude presne n. Koľko máme krabičiek a koľko guľôčok?

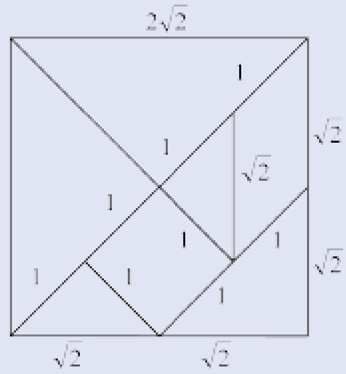
(Vojtech Bálint)

4. Tangram je skladačka, ktorá sa dá vyrobiť z papiera rozrezaním vystrihnutého štvorca na sedem dielov podľa čiar vyznačených na obrázku. Dĺžka strany štvorca je a_1, a_2 cm. Rozhodnite, či sa dá z dielov tangramu zložiť

a) obdĺžnik 2 cm × 4 cm,

b) obdĺžnik $\sqrt{2}$ cm$\times 4\sqrt{2}$ cm .

(Pavel Leischner)



5. V skupine n ľudí $(n \geq 4)$ sa niektorí poznajú. Vzťah „poznať sa" je vzájomný; ak osoba A pozná osobu B, tak aj B pozná A; dvojicu A, B potom nazývame dvojica známych.

a) Dokážte, že ak sú medzi každými štyrmi osobami aspoň štyri dvojice známych, potom každé dve osoby, ktoré sa nepoznajú, majú spoločného známeho.

b) Zistite, pre ktoré $n \geq 4$ existuje skupina osôb, v ktorej sú medzi každými štyrmi osobami aspoň tri dvojica známych a súčasne sa niektoré osoby nepoznajú ani nemajú spoločného známeho.

c) Rozhodnite, či v skupine šiestich osôb môžu byť v každej štvorici práve tri dvojice známych a práve tri dvojice neznámych.

(Ján Mazák)

6. Klárka mala na papieri napísané trojciferné číslo. Keď ho správne vynásobila deviatimi, dostala štvorciferné číslo, ktoré začínalo tou istou číslicou ako pôvodné číslo, prostredné dve číslice boli rovnaké a posledná číslica bola súčtom číslic pôvodného čísla. Ktoré štvorciferné číslo mohla Klárka dostať?

(Peter Novotný)

KATEGÓRIA B

1. Nájdite všetky prirodzené čísla k, pre ktoré je zápis čísla $6^k \cdot 7^{2007-k}$ v desiatkovej sústave zakončený na

a) 02;

b) 04.

(Eva Řídká)

2. V páse medzi rovnobežkami p, q sú dané dva rôzne body M a N. Zostrojte kosoštvorec alebo štvorec, ktorého dve protiľahlé strany ležia na priamkach p a q a body M a N ležia na zvyšných dvoch stranách (každý na jednej).

(Jaromír Šimša)

3. Nech x a y sú reálne čísla, pre ktoré platí $x^3 + y^3 \leq 2$. Dokážte, že $x + y \leq 2$.

(Ján Mazák)

4. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky s dĺžkami strán a, b, c a dĺžkami ťažníc t_a, t_b, t_c, pre ktoré platí $a + t_a = b + t_b$. Uvažujte oba prípady, keď AB je

a) prepona,

b) odvesna.

(Pavel Novotný)

5. Určte všetky dvojice (a, b) reálnych čísel, pre ktoré má každá z kvadratických rovníc

$$ax^2 + 2bx + 1 = 0, \qquad bx^2 + 2ax + 1 = 0$$

dva rôzne reálne korene, pričom práve jeden je obidvom rovniciam spoločný.

(Jaroslav Švrček)

6. Obdĺžnik 2005×2007 je rozdelený na čierne a biele jednotkové štvorčeky. Dokážte, že pre jednu z farieb (čiernu alebo bielu) existuje viac ako 95 800 pravouholníkov (zložených z jednotkových štvorčekov), ktoré sa navzájom neprekrývajú a ktorých všetky rohové štvorčeky majú zvolenú farbu, pričom každá z ich strán je tvorená aspoň dvoma štvorčekmi.

(Pavel Leischner)

KATEGÓRIA A

1. Nájdite všetky trojice reálnych čísel *a, b, c* s nasledovnou vlastnosťou:
Každá z rovníc

$$x^3 + (a+1)x^2 + (b+3)x + (c+2) = 0,$$

$$x^3 + (a+2)x^2 + (b+1)x + (c+3) = 0,$$

$$x^3 + (a+3)x^2 + (b+2)x + (c+1) = 0$$

má v obore reálnych čísel tri rôzne korene, spolu je to ale len päť rôznych čísel.

(Jaromír Šimša)

2. V rovine ja daná úsečka *AV* a ostrý uhol veľkosti α. Určte množinu stredov kružníc opísaných všetkým tým trojuholníkom *ABC* s vnútorným uhlom α pri vrchole *A,* ktorých výšky sa pretínajú v bode *V*.

(Pavel Leischner)

3. Množinu M tvorí $2n$ navzájom rôznych kladných čísel, kde $n \geq 2$. Uvažujme n obdĺžnikov, ktorých rozmery sú čísla z M, pričom každý prvok z M je použitý práve jedenkrát. Určte, aké rozmery majú tieto obdĺžniky, ak je súčet ich obsahov
a) najväčší možný;
b) najmenší možný.

(Jaroslav Švrček)

4. Určte počet konečných rastúcich postupností prirodzených čísel $a_1, a_2, \cdots, a_k$ všetkých možných dĺžok *k,* pre ktoré platí $a_1 = 1,\ a_i \mid a_{i+1}$ pre všetky $i \in \{1, 2, \cdots, k-1\}$ a $a_k = 969969$.

(Martin Panák)

5. Je daná kružnica *k*, bod *O*, ktorý na nej neleží, a priamka *p*, ktorá ju nepretína. Uvažujme ľubovoľnú kružnicu *l*, ktorá má vonkajší dotyk s kružnicou *k* a dotýka sa i priamky *p*. Príslušné body dotyku označme *A* a *B*. Ak body *O, A, B* neležia na jednej priamke, zostrojíme kružnicu opísanú trojuholníku *OAB*. Dokážte, že všetky také kružnice m majú ďalší spoločný bod rôzny od bodu *O* alebo sa dotýkajú tej istej priamky.

(Ján Mazák)

6. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo *n* existuje prirodzené číslo *a* také, že $1 < a < 5^n$ a $5^n \mid (a^3 - a + 1)$.

(Ján Mazák)