MATMIX

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Janko, Anička a Peter sú súrodenci. V tomto roku má Anička dvakrát toľko rokov ako Janko. O tri roky bude mať Janko polovicu Petrovho veku a pred tromi rokmi mal Peter dvakrát toľko rokov ako Anička. Určte vek každého z nich.

Riešenie: Označme vek Janka ako x. Potom má Anička v tomto roku $2x$ rokov. O tri roky bude mať Janko $x + 3$ rokov, čo je polovica Petrovho veku. To znamená, že o tri roky bude mať Peter $2x + 6$ rokov, a teda tento rok má $2x + 3$ rokov a pred tromi rokmi mal $2x$ rokov. Anička mala pred tromi rokmi $2x – 3$ rokov. Keďže pred tromi rokmi mal Peter dvakrát toľko rokov ako Anička, musí platiť

$$2x = 2 \cdot (2x - 3),$$

odkiaľ po úprave dostávame, že $x = 3$. To znamená, že Janko má tento rok 3 roky, Anička 6 rokov a Peter 9 rokov.

2. V košíku sú len dubáky a muchotrávky – spolu 30 húb. Keď vytiahneme ľubovoľných 12 húb z košíka, bude medzi nimi určite aspoň jeden dubák. Keď vytiahneme ľubovoľných 20 húb z košíka, bude medzi nimi určite aspoň jedna muchotrávka. Koľko je v košíku dubákov a koľko muchotrávok?

Riešenie: Keďže pri vytiahnutí 12 húb z košíka vytiahneme aspoň jeden dubák, maximálne 11 húb môžu byť muchotrávky (ak by ich bolo aspoň 12, tak môžeme vytiahnuť práve týchto 12 a medzi nimi nebude ani jeden dubák). Podobne dostaneme, že v košíku môže byť maximálne 19 dubákov, pretože pri vytiahnutí 20 húb už nájdeme aspoň jednu muchotrávku. To znamená, že v košíku je aspoň $11 + 19 = 30$ húb. Keďže húb je práve 30, jediné riešenie je 11 muchotrávok a 19 dubákov.

3. Nájdite dve päťciferné čísla, ktorých súčet dáva 123 456, pričom požadujeme, aby jeden zo sčítancov mal tri cifry rovnaké a aby sa medzi použitými ciframi nevyskytovala jednotka.

Riešenie: Táto úloha má veľmi veľa riešení, napríklad:

99 999 + 23 457,
99 879 + 23 577,
44 436 + 79 020.

Dokonca aj za podmienky, že obe čísla majú po tri cifry rovnaké, existuje viacero riešení, napr. 44 456 + 79 000.

4. Pri otváraní športových hier nastupovali vlajkonosiči s vlajkami jednotlivých štátov. Pri prvej oslavnej salve nastúpila prvá skupina vlajkonosičov. Pri druhej salve nastúpili ďalší vlajkonosiči a zaradili sa tak, že medzi každých dvoch vlajkonosičov na štadióne sa postavil ďalší vlajkonosič. Pri ďalšej salve znova medzi každú dvojicu vlajkonosičov pristúpil ďalší. Po tretej salve stálo na ploche štadióna 113 vlajkonosičov. Koľko vlajkonosičov nastúpilo pri prvej salve?

Riešenie: Označme počet vlajkonosičov na začiatku pri prvej salve x. Pri druhej salve pribudlo o jedného menej (vedľa každého vlajkonosiča okrem toho, ktorý je najviac vpravo, sa vpravo postavil jeden nový), teda $x – 1$ vlajkonosičov, takže ich tam bolo $2x – 1$. Pri ďalšej salve pribudlo o jedného menej, teda $2x – 2$. To znamená, že ich tam bolo spolu $4x – 3$. Preto musí platiť $4x - 3 = 113$, odkiaľ dostávame, že $x = 29$. To znamená, že pri prvej salve nastúpilo 29 vlajkonosičov. Skúškou sa presvedčíme, že pri druhej salve nastúpilo 28 vlajkonosičov a bolo ich celkovo 57. Pri tretej salve nastúpilo ďalších 56 vlajkonosičov a bolo ich na štadióne celkovo 113.

5. Kam treba dať vo výraze 5 000 – 4 999 + 4 998 – ... + 2 – 1) ľavú zátvorku, aby vyšiel výsledok 2 013?

Riešenie: Ak dáme ľavú zátvorku za plusom, tak je to to isté, ako keby sme žiadne zátvorky nemali. Daný výraz by sa potom rovnal súčtu 2 500 jednotiek, pretože rozdiel dvoch za sebou idúcich čísel sa rovná jednej, teda 2 500. Toto číslo sa však nerovná 2 013. Preto zátvorka musí byť umiestnená za mínusom. Označme si jej umiestnenie podľa toho, pred ktorým číslom sa nachádza. Keďže bude za mínusom, bude pred nepárnym číslom. Preto si túto pozíciu môžeme označiť ako $2k – 1$, kde k je prirodzené číslo:

$$5\,000 - 4\,999 + 4\,998 - \ldots + 2k -$$

$$-\big([2k-1] + [2k-2] - [2k-3] + \ldots + 4 - 3 + 2 - 1\big).$$

V zátvorke potom dostaneme tento výraz (bez zátvoriek, tie sú doplnené pre lepšiu prehľadnosť ďalšieho postupu):

$$[2k-1] + \{[2k-2] - [2k-3]\} +$$

$$+\{[2k-4] - [2k-5]\} + \ldots + \{4-3\} + \{2-1\}.$$

Rozdiely v zložených zátvorkách sa rovnajú jednej. Počet zložených zátvoriek sa rovná polovici počtu prirodzených čísel, ktoré sa nachádzajú od 1 po $2k – 2$. Tých je $2k – 2$, takže hodnota výrazov v zložených zátvorkách je

$$(2k-2) : 2 = k - 1.$$

Hodnota výrazu v okrúhlych zátvorkách preto bude

$$[2k-1] + [k-1] = 3k - 2.$$

Teraz sa pozrieme na výraz pred ľavou okrúhlou zátvorkou:

$$\{5\,000 - 4\,999\} + \{4\,998 - 4\,997\} + \ldots +$$

$$+\{[2k+2] - [2k+1]\} + 2k.$$

Analogicky dostaneme, že hodnota každej zloženej zátvorky je jedna a potrebujeme zistiť, koľko ich tam je. Ich počet sa rovná polovici počtu prirodzených čísel od $2k + 1$ po 5 000. Tých je

$$\frac{5\,000 - [2k+1] + 1}{2} = 2\,500 - k.$$

Preto bude celkový súčet čísel pred okrúhlou zátvorkou

$$[2\,500 - k] + 2k = 2\,500 + k.$$

Celková hodnota výrazu zo zadania potom bude

$$[2\,500 + k] - [3k - 2] = 2\,502 - 2k.$$

To znamená, že musíme riešiť rovnicu $2\,502 - 2k = 2\,013$. Jej riešením dostávame, že má platiť $2k = 489$, čo však nie je možné. Preto do daného výrazu v zadaní nie je možné umiestniť ľavú zátvorku tak, aby bola jeho hodnota 2 013.

6. Dvojciferné číslo nazývame „súčtosúčinové“, ak preň platí, že súčet jeho číslic so súčinom jeho číslic sa rovná tomuto číslu (napr. $39 = 3 + 9 + 3 \cdot 9$). Určte súčet všetkých súčtosúčinových čísel.

Riešenie: Uvažujme ľubovoľné dvojciferné súčtosúčinové číslo v tvare $10a + b$, kde a, b sú cifry a $a \neq 0$. Potom má platiť:

$$10a + b = a + b + ab.$$

Odčítaním $a + b$ od oboch strán rovnice dostávame, že platí $9a = ab$, odkiaľ prenesením $9a$ na druhú stranu rovnice a vyňatím a pred zátvorku dostávame, že platí

$$a \cdot (b - 9) = 0.$$

Keďže $a \neq 0$, musí platiť $b = 9$, teda ide o všetky dvojciferné čísla, ktoré majú na mieste jednotiek deviatku. Hľadaný súčet sa preto rovná

$$19 + 29 + \ldots + 99.$$

Tento súčet si ďalej upravíme a dostaneme, že platí:

$$19 + 29 + \ldots + 99 = (1 \cdot 10 + 9) + (2 \cdot 10 + 9) + \ldots + (9 \cdot 10 + 9) =$$

$$= 9 \cdot 9 + 10 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 81 + 10 \cdot 45 = 531.$$

Súčet všetkých súčtosúčinových čísel sa rovná 531.

Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Keď gepard začal prenasledovať antilopu, bola medzi nimi vzdialenosť 60 metrov. Antilopa unikala rýchlosťou 15 m/s, gepard ju dobehol za 12 sekúnd. Akou rýchlosťou bežal gepard?

2. Z 200 žiakov, ktorí podali prihlášku na gymnázium, bol prijatý každý druhý. Pritom bolo prijatých 35 % prihlásených dievčat a nebolo prijatých 40 % prihlásených chlapcov. Koľko chlapcov a dievčat sa hlásilo na gymnázium a koľko chlapcov a dievčat prijali?

3. V klobúku je päť loptičiek a na každej z nich je napísané práve jedno prirodzené číslo. Súčet čísel na loptičkách v klobúku je 27 a čísla na ľubovoľných dvoch loptičkách sa líšia aspoň o dva. Dokážte, že v klobúku nie je loptička s číslom 6.

4. Aký najväčší počet kráľov môžeme umiestniť na šachovnicu 8 x 8 políčok tak, aby sa žiadni dvaja neohrozovali? Kráľ ohrozuje všetky políčka, ktoré susedia s políčkom, na ktorom sa nachádza. Na jednom políčku môže byť len jeden kráľ.

5. Ukážte, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel práve vtedy, keď $n \geq 10$ a n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi.

6. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí nerovnosť:
$$a^4 + b^4 \geq a^3 b + ab^3.$$

7. Dokážte, že z ľubovoľnej sedmice prirodzených čísel dokážeme vybrať dve také, ktorých súčet alebo rozdiel bude deliteľný desiatimi.

8. Predpokladajme, že každý bod roviny je ofarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že potom pre jednu z týchto dvoch farieb platí, že pre každé kladné reálne číslo existuje dvojica bodov ofarbených touto farbou, ktorých vzdialenosť sa rovná tomuto číslu.

9. Dokážte, že číslo $2^{1092} - 1$ je deliteľné číslom 1093^2.

10. Nájdite všetky prirodzené čísla m, n, ktoré sú riešeniami rovnice
$$2^m - 3^n = 7.$$

11. Zistite, či existuje množina 4 024 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 013-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 013.

12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom
$$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1},$$
pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:
$$\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n \cdot (n!)^2$$

Riešenia zasielajte na adresu:

Ing. Mgr. Martin Hriňák
MATMIX
Bratislavská 716/2
900 46 Most pri Bratislave

Termín odoslania úloh 2. série: do 28. 2. 2014