MATMIX

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Učiteľka hovorí žiakom v triede: „Keby som dala každému z vás 7 jabĺk, zostalo by mi 24 jabĺk. Ale keby som vám chcela dať po 9 jabĺk, chýbalo by mi 32 jabĺk.“ Koľko má učiteľka jabĺk a koľko žiakov v triede?

Riešenie: Označme počet žiakov v triede p a počet jabĺk j. Potom musí platiť:

$$7p+24=j,$$
$$9p-32=j.$$

Spojením týchto dvoch rovníc dostávame, že musí platiť

$$7p+24=9p-32.$$

Túto rovnicu si upravíme na tvar $2p=56,$ odkiaľ dostávame, že $p=28.$ Dosadením tejto hodnoty do prvej rovnice dostávame, že

$$j=7\cdot 28+24=220.$$

To znamená, že v triede je 28 žiakov a učiteľka mala 220 jabĺk.

2. Súčet číslic dvojciferného čísla je 12. Keď číslicu na mieste desiatok násobíme dvoma, číslicu na mieste jednotiek troma a súčiny sčítame, dostaneme číslo 29. Aké bolo pôvodné číslo?

Riešenie: Označme si dvojciferné číslo $\overline{ab}$, kde a a b sú cifry, pričom a nie je 0. Potom na základe zadania musí platiť:

$$a+b=12,$$
$$2a+3b=29.$$

Z prvej rovnice si vyjadríme neznámu a v tvare $a=12-b$ a toto vyjadrenie dosadíme do druhej rovnice. Postupne dostaneme, že platí

$$2\cdot(12-b)+3b=29,$$
$$24-2b+3b=29,$$
$$b=5.$$

Dosadením tejto hodnoty b do rovnice $a=12-b$ dostaneme, že platí $a=12-5=7,$ teda hľadané číslo je 75.

3. Klobúk, plášť a čižmy stoja dokopy 137 €. Určte, koľko stojí každý kus oblečenia, ak plášť je šesťkrát drahší ako klobúk a čižmy sú o 20 € drahšie ako plášť.

Riešenie: Označme cenu klobúka k, plášťa p a čižiem c. Potom musí na základe zadania platiť:

$$k+p+c=137,$$
$$p=6k,$$
$$c=p+20.$$

Dosadením druhej rovnice do tretej dostaneme, že platí

$$c=6k+20.$$

Teraz dosadíme toto vyjadrenie c spolu s druhou rovnicou do prvej a dostaneme, že platí

$$k+6k+(6k+20)=137.$$

Túto lineárnu rovnicu vyriešime a dostaneme, že platí

$$13k=117,$$
$$k=9.$$

Dosadením hodnoty $k=9$ do vyššie uvedených rovníc pre p a c dostaneme, že platí

$$p=6k=6\cdot 9=54,$$
$$c=p+20=54+20=74.$$

Celkovo dostávame, že klobúk stojí 9 €, plášť 54 € a čižmy 74 €.

4. V minulosti sa na našom území používali rôzne platidlá, ktorých používanie bolo náročnejšie ako v súčasnosti. Mohli ste sa stretnúť so zlatými, zlatkami, toliarmi, dukátmi, grošmi, denármi, grajciarmi a inými menami. Ako už názov hovorí, boli to zlaté, ale aj strieborné či medené mince. Obsah drahých kovov sa postupne v týchto minciach zmenšoval, čo znižovalo aj ich hodnotu. Aj preto sa častokrát na trhoch neplatilo len mincami, ale aj v naturáliách. Napríklad za osem lyžíc ste mohli vymeniť tri taniere. Ak ste však mali mince, mohli ste si za jeden zlatý kúpiť tri krčahy a desať lyžíc. Pri platbe za päť krčahov, päť tanierov a desať lyžíc ste z platby dvoma zlatými dostali výdavok desať grajciarov.
   a) Určte, koľko grajciarov stojí jedna lyžica, jeden tanier a jeden krčah, ak viete, že päť tanierov stojí o jedenásť grajciarov viac ako šesť lyžíc.
   b) Určte, koľko grajciarov dostanete za jeden zlatý.

Riešenie: Na základe zadania sformulujeme sústavu štyroch rovníc s piatimi neznámymi l (cena lyžice v grajciaroch), t (cena taniera v grajciaroch), k (cena krčaha v grajciaroch), z (hodnota zlatého v grajciaroch) a g (hodnota jedného grajciara):

$$8l=3t, \qquad (1)$$
$$3k+10l=z, \qquad (2)$$
$$5t=6l+11g, \qquad (3)$$
$$5k+5t+10l=2z-10g. \qquad (4)$$

Dosadením vyjadrenia z z rovnice (2) do rovnice (4) dostaneme, že platí

$$5k+5t+10l=2(3k+10l)-10g,$$

čo upravíme na tvar

$$5t=k+10l-10g. \qquad (5)$$

Z rovnice (1) dostávame po prenásobení 5, že platí

$$40l=15t. \qquad (6)$$

Ak prenásobíme rovnicu (3) troma, dostávame, že platí

$$15t=18l+33g. \qquad (7)$$

Porovnaním rovníc (6) a (7) dostávame, že platí

$$40l=18l+33g,$$

odkiaľ dostaneme, že $22l=33g$, čo znamená, že

$$l=1{,}5g. \qquad (8)$$

Dosadením (8) do (3) dostávame, že platí $5t=6\cdot 1{,}5g+11g$, teda $5t=20g$, odkiaľ dostávame, že platí

$$t=4g. \qquad (9)$$

Dosadením (8) a (9) do (5) dostávame, že platí

$$5\cdot 4g=k+10\cdot 1{,}5g-10g,$$

odkiaľ po úprave dostaneme, že platí

$$15g=k. \qquad (10)$$

Dosadením (8) a (10) do (2) dostávame, že platí

$$3\cdot 15g+10\cdot 1{,}5g=z,$$

odkiaľ po úprave dostaneme, že platí $60g=z.$

Celkovo dostávame, že jedna lyžica stojí jeden a pol grajciara, jeden tanier stojí štyri grajciare, jeden krčah stojí 15 grajciarov a jeden zlatý má hodnotu 60 grajciarov.

5. Ukážte, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel práve vtedy, keď $n \geq 10$ a n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi.

Riešenie: Predpokladajme, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel. Potom musí existovať nejaké prirodzené číslo k, pre ktoré platí

$$n = k + (k+1) + (k+2) + (k+3),$$

teda

$$n = 4k + 6 = 4 \cdot (k+1) + 2,$$

teda číslo n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi. Najmenšie také prirodzené číslo je $1+2+3+4=10$, a teda platí $n \geq 10$.

Teraz predpokladajme, že $n \geq 10$ a n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi. Potom existuje také prirodzené číslo k, že platí $n = 4k+2$. Keďže platí $n \geq 10$, musí platiť $4k+2 \geq 10$, teda $k \geq 2$. Prirodzené číslo n môžeme zapísať v tvare súčtu

$$n = 4k + 2 = (k-1) + (k) + (k+1) + (k+2).$$

Keďže $k \geq 2$, všetky čísla na pravej strane sú prirodzené, a teda prirodzené číslo n sme vyjadrili ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel.

Na základe týchto dvoch implikácií môžeme povedať, že platí ekvivalencia, a teda platí, že prirodzené číslo n možno vyjadriť ako súčet štyroch po sebe idúcich prirodzených čísel práve vtedy, keď $n \geq 10$ a n dáva zvyšok 2 po delení štyrmi.

6. Dokážte, že pre ľubovoľné reálne čísla a, b platí nerovnosť:

$$a^4 + b^4 \geq a^3 b + ab^3.$$

Riešenie: Nerovnosť zo zadania budeme postupne upravovať ekvivalentnými úpravami:

$$a^4 - a^3 b + b^4 - ab^3 \geq 0,$$
$$a^3 \cdot (a-b) + b^3 \cdot (b-a) \geq 0,$$
$$a^3 \cdot (a-b) - b^3 \cdot (a-b) \geq 0,$$
$$(a^3 - b^3) \cdot (a-b) \geq 0.$$

Ak platí $a \geq b$, tak potom platí aj $a^3 \geq b^3$, a teda na ľavej strane dostávame súčin dvoch nezáporných čísel, a teda nerovnosť platí. Ak platí $a < b$, tak potom platí aj $a^3 < b^3$, a teda na ľavej strane dostávame súčin dvoch záporných čísel, ktorý je kladný, a teda nerovnosť platí tiež. Keďže sme používali len ekvivalentné úpravy a iné prípady ako vyššie uvedené nemôžu nastať, dokázali sme danú nerovnosť.

Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Obdĺžniková záhrada má dĺžku 100 m a šírku 20 m. Vypočítajte, o koľko metrov štvorcových sa zmenší jej úžitková plocha, ak sa ohradí okrasným plotom, ktorý má šírku 50 cm.

2. Miško si pomyslel jedno číslo z nasledujúcej tabuľky. Zuzka hádala, potom povedala, že hľadané číslo:
   a) je v prvom riadku,
   b) nie je v druhom stĺpci,
   c) je párne,
   d) je väčšie ako 3.

1	2	3
9	5	6
7	4	8

   Miško jej potom povedal, že iba jedna zo štyroch výpovedí je pravdivá a tri zvyšné sú nepravdivé. Ktoré číslo si Miško myslel?

3. Nájdite všetky prirodzené čísla deliteľné štyrmi, ktorých ciferný súčet sa rovná siedmim a ciferný súčin šiestim.

4. V lichobežníku majú základne dĺžky 20 cm a 10 cm, ramená 10 cm a $4\sqrt{5}$ cm. Vypočítajte obsah tohto lichobežníka.

5. Na dvoch kolesách, ktoré sa zvonka dotýkajú, je natiahnutý pás. Určte jeho dĺžku, ak polomery kolies majú veľkosť 15 cm a 45 cm.

6. Dokážte, že pre ľubovoľné kladné reálne čísla x, y, z platí nerovnosť

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{y^3}{y^2+z^2} + \frac{z^3}{z^2+x^2} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

7. Dokážte, že z ľubovoľnej sedmice prirodzených čísel dokážeme vybrať dve také, ktorých súčet alebo rozdiel bude deliteľný desiatimi.

8. Predpokladajme, že každý bod roviny je ofarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že potom pre jednu z týchto dvoch farieb platí, že pre každé kladné reálne číslo existuje dvojica bodov ofarbených touto farbou, ktorých vzdialenosť sa rovná tomuto číslu.

9. Dokážte, že číslo $2^{1092} - 1$ je deliteľné číslom 1093^2.

10. Nájdite všetky prirodzené čísla m, n, ktoré sú riešeniami rovnice $2^m - 3^n = 7$.

11. Zistite, či existuje množina 4 024 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 013-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 013.

12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom

$$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1},$$

pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:

$$(2n^2 + 3n + 1)^n \geq 6^n \cdot (n!)^2$$

Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 9. 3. 2015