

6. Judita a Petra trénujú cezpoľný beh v mestskom lesoparku. Judita prebehne trať od zastávky autobusu po studničku za 12 minút, Petra za 20 minút. Vyštartovali súčasne od zastávky. Keď Judita dobehla k studničke, otočila sa a bežala späť po tej istej ceste. O chvíľu sa stretla s Petrou. Po koľkých minútach od ich stretnutia dobehla Petra k studničke?

Riešenie: Judita prebehne za jednu minútu $1/12$ trate a Petra $1/20$ trate. Keď bola Judita o 12 minút od vyštartovania pri studničke, Petra mala prebehnutých $12/20$ celej trate a bola vo vzdialenosti 8 minút od studničky. To znamená, že v tomto okamihu boli Petra a Judita vo vzdialenosti $8/20 = 2/5$ celej trate. Od tohto okamihu bežia proti sebe, a teda ich vzájomné rýchlosti musíme sčítať. Za minútu tak spolu prebehnú

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{5+3}{60} = \frac{8}{60} = \frac{2}{15}$$

trate. Stretnú sa preto o $\frac{2}{5} : \frac{2}{15} = 3$ minúty.

Petre potom bude trvať dobehnutie k studničke ešte $8 - 3 = 5$ minút.

7. Dokážte, že z ľubovoľnej sedmice prirodzených čísel dokážeme vybrať dve také, ktorých súčet alebo rozdiel bude deliteľný desiatimi.

Riešenie: Pozrime sa na zvyšky, ktoré dávajú tieto čísla po delení desiatimi. Všetkých možných zvyškov je 10 – sú to 0, 1, 2, ..., 9. Ak by medzi uvedenými siedmimi číslami boli dve, ktoré dávajú rovnaký zvyšok po delení 10, tak ich rozdiel by bol deliteľný desiatimi a tvrdenie úlohy sme dokázali.

Ak medzi nimi nie sú dve také, ktoré by dávali rovnaký zvyšok po delení desiatimi, dávajú všetky iný zvyšok po delení desiatimi.

Pozrime sa teraz na dvojice zvyškov 1 a 9, 2 a 8, 3 a 7, 4 a 6 (ostali nám ešte zvyšky 0 a 5). Ak by medzi siedmimi vybranými číslami boli dve také, ktorých zvyšky po delení desiatimi tvoria jednu dvojicu, tak ich súčet bude deliteľný desiatimi a tvrdenie úlohy sme dokázali.

Ostala nám už len situácia, keď z každej dvojice je medzi siedmimi vybranými číslami len jedno, ktoré dáva príslušný zvyšok po delení desiatimi. Takéto čísla však môžu byť len štyri, pretože máme štyri dvojice. Ak k týmto štyrom číslam pripočítame maximálne dve čísla, ktoré môžu dávať zvyšok 0 alebo 5 po delení desiatimi, dostávame šesť čísel. Keďže čísel je sedem, musí byť toto siedme číslo buď v nejakej dvojici, alebo dávať zvyšok 0 alebo 5 po delení desiatimi, a teda máme dve čísla, ktoré buď dávajú rovnaký zvyšok po delení desiatimi (a teda ich rozdiel je deliteľný desiatimi – keďže ide o zvyšky 0 a 5, tak aj ich súčet bude deliteľný desiatimi), alebo ich súčet je deliteľný desiatimi, čím sme tvrdenie úlohy dokázali.

8. Predpokladajme, že každý bod roviny je ofarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že potom pre jednu z týchto dvoch farieb platí, že pre každé kladné reálne číslo existuje dvojica bodov ofarbených touto farbou, ktorých vzdialenosť sa rovná tomuto číslu.

Riešenie: Tvrdenie úlohy dokážeme dôkazom sporom. Predpokladajme, že tvrdenie úlohy neplatí, teda platí tvrdenie: Pre každú farbu platí, že existuje kladné reálne číslo, pre ktoré platí, že neexistujú dva body rovnakej farby, ktorých vzdialenosť by sa rovnala tomuto číslu. Inak povedané, existujú dve kladné reálne čísla x a y (nie nutne rôzne), pričom platí, že každé dva body, ktorých vzdialenosť je x , nie sú ofarbené prvou farbou, a každé dva body, ktorých vzdialenosť je y , nie sú ofarbené druhou farbou. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že platí $x \geq y$.

Vyberme si ľubovoľný bod roviny, ktorý je ofarbený prvou farbou. Pozrime sa na ľubovoľný rovnoramenný trojuholník, ktorý má hlavný vrchol v tomto bode, ramená s dĺžkou x a základňu s dĺžkou y (tento trojuholník existuje vzhľadom na podmienku $x \geq y$). Keďže žiadne dva body ofarbené prvou farbou nemajú vzdialenosť x , musia byť oba vrcholy základne tohto trojuholníka ofarbené druhou farbou. Tým sme ale dostali spor s predpokladom, že žiadne dva body ofarbené druhou farbou nemajú vzdialenosť y . Vzhľadom na to je náš predpoklad nesprávny a platí dokazované tvrdenie.

FESTIVAL VEDECKÝCH FILMOV 2016

Tohtoročný Festival vedeckých filmov 2016 sa bude konať 27. – 29. júna v Bratislave. Tešiť sa môžete na filmy zo slovenskej produkcie, ale aj na prednášky popredných slovenských vedcov a vedkýň. Festival bude rozdelený do troch tematických dní, pričom počas jedného z nich sa pri príležitosti Medzinárodného roka strukovín 2016 budeme venovať poľnohospodárskym a potravinárskym vedám. Ďalší deň bude patriť technickým vedám a robotike – nahliadneme do sveta mobilných robotických systémov a umelej inteligencie. Posledný festivalový deň bude doobeda venovaný prírodným vedám, konkrétne parazitológii. Po večernom premietaní dokumentov o informačných technológiách budeme s hosťami diskutovať o ich využívaní v oblastiach vedy.

