MATMIX

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Stretli sa lev a zajac. O levovi je známe, že v pondelok, utorok a stredu vždy klame, ale v ostatné dni hovorí pravdu. O zajacovi je známe, že klame vždy vo štvrtok, piatok a sobotu a v ostatné dni hovorí pravdu.

   Lev hovorí: „Včera sa na mňa usmiala krásavica Elza!“
   Zajac: „Aj na mňa sa usmiala. A aký si mal včera deň?“
   Lev: „Klamací. A ty?“
   Zajac: „Klamací.“

   Ktorý deň v týždni sa stretli lev a zajac a na ktorého z nich sa usmiala Elza?

Riešenie: Ak by lev v deň stretnutia klamal, potom by deň pred týmto dňom musel hovoriť pravdu. To znamená, že deň stretnutia by musel byť pondelok. V pondelok hovorí zajac pravdu, takže v nedeľu by mal zajac klamať podľa jeho posledného výroku. Avšak aj v nedeľu hovorí zajac pravdu, takže tento rozhovor sa nemohol odohrať v pondelok, a teda lev nemohol klamať, teda musel v deň stretnutia hovoriť pravdu. To znamená aj to, že Elza sa určite usmiala na leva.

Keďže lev hovoril v deň stretnutia pravdu, musel predchádzajúci deň klamať. To znamená, že lev a zajac sa stretli vo štvrtok. V tento deň zajac klamal, takže sa Elza na neho neusmiala. Zároveň si overíme aj posledný výrok – keďže zajac vo štvrtok klamal, predchádzajúci deň – v stredu – hovoril pravdu, čo je aj pravda.

Záver: Lev a zajac sa stretli vo štvrtok a Elza sa usmiala na leva.

2. V biochemickom laboratóriu skúmajú rýchlosť rozmnožovania dvoch nových druhov baktérií. Do jednej skúmavky dali niekoľko baktérií druhu Bacillus Acos, do druhej skúmavky dali 3-krát viac baktérií druhu Bacillus Becos. O 24 hodín mali mali v prvej skúmavke 500 000 baktérií druhu Bacillus Acos, v druhej 1 000 000 baktérií druhu Bacillus Becos. V oboch skúmavkách pribudlo za 24 hodín rovnako veľa baktérií. Koľko baktérií druhu Bacillus Acos bolo na začiatku v skúmavke?

Riešenie: Keďže v oboch skúmavkách pribudol za 24 hodín rovnaký počet baktérií, rozdiel medzi počtom baktérií druhu Bacillus Acos a druhu Bacillus Becos sa nezmenil a rovná sa 1 000 000 – 500 000 = 500 000. Tento rozdiel sa rovná dvojnásobku počtu baktérií druhu Bacillus Acos (baktérií druhu Bacillus Becos bolo trikrát viac ako baktérií druhu Bacillus Acos, a teda rozdiel ich počtu je dvojnásobkom počtu baktérií druhu Bacillus Acos). To znamená, že baktérií druhu Bacillus Acos bola na začiatku v skúmavke polovica tohto počtu, teda 250 000.

Výpočet si môžeme overiť tak, že si dopočítame ešte počet baktérií druhu Bacillus Becos – je to trojnásobok 250 000, teda 750 000. Za 24 hodín potom pribudlo po 250 000 baktérií oboch druhov.

Úlohu môžeme riešiť aj pomocou rovníc – neznámou x si označíme počtu baktérií druhu Bacillus Acos. Potom baktérií druhu Bacillus Becos bolo na začiatku $3x$. Ak označíme počet baktérií, ktoré pribudli v každej zo skúmaviek, ako y, musí platiť:

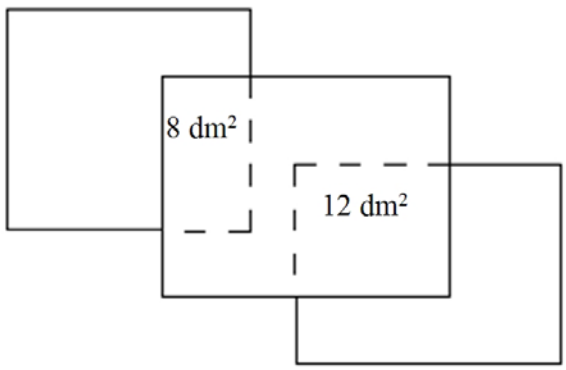
$$x + y = 500\,000,$$
$$3x + y = 1\,000\,000.$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostávame, že platí

$$2x = 500\,000,$$

teda $x = 250\,000$. Baktérií druhu Bacillus Acos bolo na začiatku v skúmavke 250 000.

3. Reklamná firma vyrába seriálové reklamné plagáty. Lepí ich na obdĺžnikové bilbordy s rozmermi 1,5 m a 2 m. Najprv nalepí na bilbord dva plagáty s neúplnými informáciami o nejakom výrobku a po týždni ich čiastočne prelepí tretím plagátom, ktorým informáciu doplní. Tretí plagát nalepí tak, aby viditeľné časti všetkých troch plagátov mali rovnaký obsah. Všetky plagáty tejto firmy, aj tretím plagátom prekryté časti, majú tvar obdĺžnika s celočíselnými rozmermi v decimetroch. Na obrázku je znázornená časť bilbordu s trojicou plagátov. Posledný z trojice plagátov má rozmery 5 dm x 8 dm. Prekryté časti majú obsahy 8 dm^2 a 12 dm^2. Aké rozmery mali prvé dva plagáty?



Riešenie: Keďže posledný z trojice plagátov má obsah 40 dm^2, bude obsah ľavého horného plagátu (označme ho ako prvý plagát)

$$40\ \text{dm}^2 + 8\ \text{dm}^2 = 48\ \text{dm}^2$$

a obsah pravého dolného plagátu (označme ho ako druhý plagát)

$$40\ dm^2 + 12\ dm^2 = 52\ dm^2.$$

Keďže rozmery plagátov sú celočíselné, prvý plagát môže mať len tieto rozmery (rozložili sme 48 na súčin dvoch prirodzených čísel):

48 dm x 1 dm,
24 dm x 2 dm,
16 dm x 3 dm,
12 dm x 4 dm,
8 dm x 6 dm.

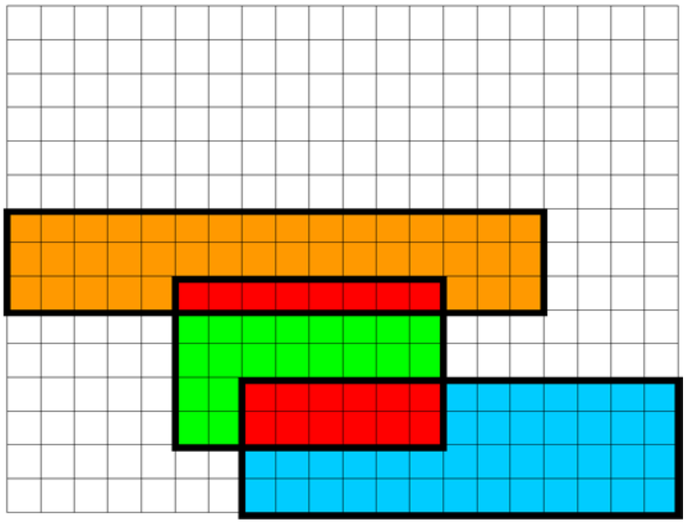
Keďže rozmery bilbordu sú 15 dm x 20 dm, maximálny rozmer je 20 dm, a teda zostali už len tieto tri možnosti: 16 dm x 3 dm, 12 dm x 4 dm, 8 dm x 6 dm.

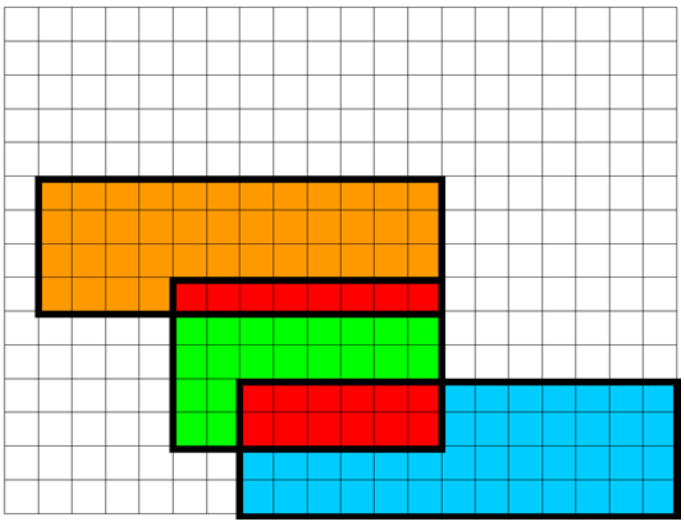
Druhý plagát môže mať tieto rozmery (rozložili sme 52 na súčin dvoch prirodzených čísel):

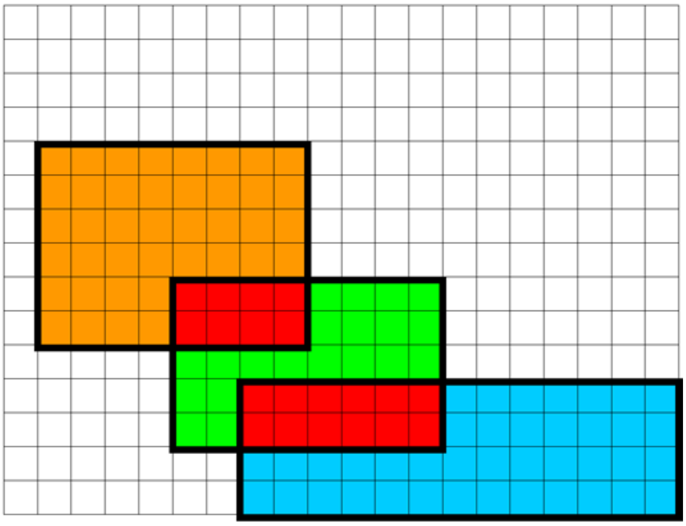
52 dm x 1 dm,
26 dm x 2 dm,
13 dm x 4 dm.

Keďže maximálny rozmer bilbordu je 20 dm, vyhovuje len jedna možnosť – 13 dm x 4 dm.

Keďže neboli stanovené žiadne bližšie pravidlá o tom, ako sa plagáty prelepujú, dostávame tri možné riešenia rozmerov plagátov: 16 dm x 3 dm a 13 dm x 4 dm, 12 dm x 4 dm a 13 dm x 4 dm, 8 dm x 6 dm a 13 dm x 4 dm. Ľahko overíme, že jednotlivé plagáty sa dajú požadovaným spôsobom umiestniť na bilbord (malý štvorec má rozmer 1 dm x 1 dm):







4. Jano a Jaro sa radi hrajú Človeče nehnevaj sa. V tejto hre veľa hádžu hracími kockami a snažia sa na ne zapôsobiť. Napríklad tak, že im rozprávajú hádanky. Prípadne aj sebe.
   „Ak by som zobral kocku, ktorá by mala stranu dvakrát väčšiu než moja a vážila štyrikrát toľko ako moja, tak by som zistil, že má štyrikrát väčšiu hustotu, než má voda.“
   Koľko váži moja kocka, ak jedna strana má dĺžku 5 cm?

Riešenie: Ak má moja kocka hranu dĺžky 5 cm, tak kocka s dvojnásobnou hranou bude mať hranu dĺžky 10 cm a jej objem bude 1 liter. Kocka s objemom 1 liter so štyrikrát väčšou hustotou ako voda má hmotnosť 4 kg. To je ale zároveň aj štvornásobok hmotnosti mojej kocky, teda hmotnosť mojej kocky je 1 kg.

Úlohu môžeme riešiť aj pomocou rovnice. Označme hmotnosť mojej kocky ako x. Dĺžka jej hrany je 0,5 dm. Ak zoberieme kocku, ktorá má hranu dvakrát väčšiu než moja, dĺžka jej hrany bude 1 dm a objem 1 dm^3. Ak je jej hmotnosť štyrikrát taká veľká ako hmotnosť mojej kocky, bude jej hmotnosť $4x$. Pre jej hustotu (v kilogramoch na decimeter kubický) musí platiť:

$$\frac{4x}{1\ \mathrm{dm}^3} = 4 \cdot 1\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3},$$

odkiaľ ľahko vypočítame, že $x = 1$ kg, teda moja kocka má hmotnosť 1 kg.

5. Súčin troch za sebou idúcich párnych čísel je v tvare 87.....8. Určte prostredných 5 cifier.

Riešenie: Označme tri za sebou idúce párne čísla zo zadania x, y, z. Môžu sa končiť postupne na 0, 2, 4, alebo na 2, 4, 6, alebo na 4, 6, 8, alebo na 6, 8, 0, alebo na 8, 0, 2. Ich súčin sa končí na cifru 8 len vtedy, ak sa spomínané tri čísla končia na 2, 4, 6. Ďalej si všimnime, že platí

$$440 \cdot 442 \cdot 444 = 86\,349\,120 < xyz < 91\,123\,200 = 448 \cdot 450 \cdot 452,$$

z čoho vyplýva, že hľadané číslo x je väčšie ako 440 a zároveň menšie ako 448. Preto musí nutne platiť

$$x = 442,$$
$$y = 444,$$
$$z = 446.$$

Prostredné cifry v tomto prípade sú 5, 2, 6, 6, 0, o čom sa presvedčíme vynásobením.

6. Judita a Petra trénujú cezpoľný beh v mestskom lesoparku. Judita prebehne trať od zastávky autobusu po studničku za 12 minút, Petra za 20 minút. Vyštartovali súčasne od zastávky. Keď Judita dobehla k studničke, otočila sa a bežala späť po tej istej ceste. O chvíľu sa stretla s Petrou. Po koľkých minútach od ich stretnutia dobehla Petra k studničke?

Riešenie: Judita prebehne za jednu minútu 1/12 trate a Petra 1/20 trate. Keď bola Judita o 12 minút od vyštartovania pri studničke, Petra mala prebehnutých 12/20 celej trate a bola vo vzdialenosti 8 minút od studničky. To znamená, že v tomto okamihu boli Petra a Judita vo vzdialenosti 8/20 = 2/5 celej trate. Od tohto okamihu bežia proti sebe, a teda ich vzájomné rýchlosti musíme sčítať. Za minútu tak spolu prebehnú

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{5+3}{60}=\frac{8}{60}=\frac{2}{15}$$

trate. Stretnú sa preto o $\frac{2}{5}:\frac{2}{15}=3$ minúty.

Petre potom bude trvať dobehnutie k studničke ešte 8 – 3 = = 5 minút.

7. Dokážte, že z ľubovoľnej sedmice prirodzených čísel dokážeme vybrať dve také, ktorých súčet alebo rozdiel bude deliteľný desiatimi.

Riešenie: Pozrime sa na zvyšky, ktoré dávajú tieto čísla po delení desiatimi. Všetkých možných zvyškov je 10 – sú to 0, 1, 2, ..., 9. Ak by medzi uvedenými siedmimi číslami boli dve, ktoré dávajú rovnaký zvyšok po delení 10, tak ich rozdiel by bol deliteľný desiatimi a tvrdenie úlohy sme dokázali.

Ak medzi nimi nie sú dve také, ktoré by dávali rovnaký zvyšok po delení desiatimi, dávajú všetky iný zvyšok po delení desiatimi.

Pozrime sa teraz na dvojice zvyškov 1 a 9, 2 a 8, 3 a 7, 4 a 6 (ostali nám ešte zvyšky 0 a 5). Ak by medzi siedmimi vybranými číslami boli dve také, ktorých zvyšky po delení desiatimi tvoria jednu dvojicu, tak ich súčet bude deliteľný desiatimi a tvrdenie úlohy sme dokázali.

Ostala nám už len situácia, keď z každej dvojice je medzi siedmimi vybranými číslami len jedno, ktoré dáva príslušný zvyšok po delení desiatimi. Takéto čísla však môžu byť len štyri, pretože máme štyri dvojice. Ak k týmto štyrom číslam pripočítame maximálne dve čísla, ktoré môžu dávať zvyšok 0 alebo 5 po delení desiatimi, dostávame šesť čísel. Keďže čísel je sedem, musí byť toto siedme číslo buď v nejakej dvojici, alebo dávať zvyšok 0 alebo 5 po delení desiatimi, a teda máme dve čísla, ktoré buď dávajú rovnaký zvyšok po delení desiatimi (a teda ich rozdiel je deliteľný desiatimi – keďže ide o zvyšky 0 a 5, tak aj ich súčet bude deliteľný desiatimi), alebo ich súčet je deliteľný desiatimi, čím sme tvrdenie úlohy dokázali.

8. Predpokladajme, že každý bod roviny je ofarbený jednou z dvoch farieb. Dokážte, že potom pre jednu z týchto dvoch farieb platí, že pre každé kladné reálne číslo existuje dvojica bodov ofarbených touto farbou, ktorých vzdialenosť sa rovná tomuto číslu.

Riešenie: Tvrdenie úlohy dokážeme dôkazom sporom. Predpokladajme, že tvrdenie úlohy neplatí, teda platí tvrdenie: Pre každú farbu platí, že existuje kladné reálne číslo, pre ktoré platí, že neexistujú dva body rovnakej farby, ktorých vzdialenosť by sa rovnala tomuto číslu. Inak povedané, existujú dve kladné reálne čísla x a y (nie nutne rôzne), pričom platí, že každé dva body, ktorých vzdialenosť je x, nie sú ofarbené prvou farbou, a každé dva body, ktorých vzdialenosť je y, nie sú ofarbené druhou farbou. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že platí $x \geq y$.

Vyberme si ľubovoľný bod roviny, ktorý je ofarbený prvou farbou. Pozrime sa na ľubovoľný rovnoramenný trojuholník, ktorý má hlavný vrchol v tomto bode, ramená s dĺžkou x a základňu s dĺžkou y (tento trojuholník existuje vzhľadom na podmienku $x \geq y$). Keďže žiadne dva body ofarbené prvou farbou nemajú vzdialenosť x, musia byť oba vrcholy základne tohto trojuholníka ofarbené druhou farbou. Tým sme ale dostali spor s predpokladom, že žiadne dva body ofarbené druhou farbou nemajú vzdialenosť y. Vzhľadom na to je náš predpoklad nesprávny a platí dokazované tvrdenie.

FESTIVAL VEDECKÝCH FILMOV 2016

Tohtoročný Festival vedeckých filmov 2016 sa bude konať 27. – 29. júna v Bratislave. Tešiť sa môžete na filmy zo slovenskej produkcie, ale aj na prednášky popredných slovenských vedcov a vedkýň. Festival bude rozdelený do troch tematických dní, pričom počas jedného z nich sa pri príležitosti Medzinárodného roka strukovín 2016 budeme venovať poľnohospodárskym a potravinárskym vedám. Ďalší deň bude patriť technickým vedám a robotike – nahliadneme do sveta mobilných robotických systémov a umelej inteligencie. Posledný festivalový deň bude doobeda venovaný prírodným vedám, konkrétne parazitológii. Po večernom premietaní dokumentov o informačných technológiách budeme s hosťami diskutovať o ich využívaní v oblastiach vedy.