18. Čo je to keloidná jazva a ako sa má liečiť? (4 body)

19. Z ktorých divorastúcich druhov banánovníka bola vyšľachtená väčšina súčasných banánov, ktoré sú na našom trhu? Uveďte aj ich latinské názvy. (4 body)

20. Aké môžu byť ústne ústroje hmyzu? (4 body)

21. Opíšte, ako prebieha rast banánovníka od jeho vysadenia až po zber plodov. (5 bodov)

22. Opíšte konvenciu Nitra v dražobnom systéme Tatry vrátane podmienok jej použitia. (6 bodov)

23. Štyria kamaráti sa vážili tak, že sa na váhu postavili vždy práve traja. Postupne vážili 170,5 kg, 167,8 kg, 173,1 kg a 172,3 kg. Koľko vážia jednotliví kamaráti? (7 bodov)

24. Nech k je najmenšie prirodzené číslo také, že číslo $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ je deliteľné číslom 1 000 000. Aký je ciferný súčet čísla k? (8 bodov)

25. Štvorec $ABCD$ má veľkosť strany 6 cm. Stred strany AB označíme ako bod E. Úsečky AC a DE rozdelia štvorec na štyri útvary. Vypočítajte obsahy týchto útvarov. (9 bodov)

Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 31. 3. 2017

MATMIX

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Štyri kuchárky v školskej jedálni načistia 5 kilogramov zemiakov za 10 minút. Koľko kuchárok rovnakej výkonnosti by muselo pracovať, aby stihli načistiť 9 kilogramov zemiakov za 12 minút?

Riešenie: Ak štyri kuchárky v školskej jedálni načistia 5 kilogramov zemiakov za 10 minút, tak za 12 minút načistia štyri kuchárky $5 \cdot 12 : 10 = 6$ kilogramov zemiakov, pretože ide o priamu úmernosť. Keďže ale potrebujeme 9 kilogramov zemiakov za 12 minút, musíme ešte upraviť počet kuchárok, a to na $4 \cdot 9 : 6 = 6$, pretože aj v tomto prípade ide o priamu úmernosť. Dostávame tak, že 6 kuchárok v školskej jedálni načistí 9 kilogramov zemiakov za 12 minút.

2. Farmár chcel rozdeliť svoje stádo koní medzi štyroch synov. Najstaršiemu chcel dať tretinu, druhému najstaršiemu štvrtinu a dvom najmladším chcel dať každému pätinu počtu koní. Nevedel to urobiť presne bez toho, aby musel rozdeliť koňa. Potom sa mu narodilo žriebä, s ktorého pomocou dokázal svoje stádo požadovaným spôsobom rozdeliť medzi synov a navyše mu toto žriebä ostalo. Zistite, koľko koní malo farmárovo stádo pred narodením žriebäťa a koľko koní dostali jednotliví synovia.

Riešenie: Označme počet koní v stáde farmára po narodení žriebäťa ako n. Potom musí platiť:

$$\frac{n}{3} + \frac{n}{4} + 2 \cdot \frac{n}{5} + 1 = n.$$

Prenásobením oboch strán tejto lineárnej rovnice číslom 60 dostaneme, že platí $20n + 15n + 24n + 60 = 60n$.

Po odčítaní $59n$ od oboch strán rovnice dostaneme, že platí $n = 60$, a teda farmár mal po narodení žriebäťa 60 koní, a teda pred jeho narodením ich mal 59.

Najstarší syn dostal $60 : 3 = 20$ koní, druhý najstarší $60 : 4 = 15$ koní a dvaja najmladší po $60 : 5 = 12$ koní, čo je dokopy $20 + 15 + 12 + 12 = 59$ koní.

3. Na záhradke je niekoľko mačiek a husí. Spolu ich je 90 a dokopy majú 258 nôh. Koľko je na dvore mačiek a koľko husí?

Riešenie: Označme počet mačiek m a počet husí h. Vieme, že mačka má štyri nohy a hus dve nohy. Potom môžeme sformulovať na základe informácií zo zadania úlohy tieto dve rovnice:

$$m + h = 90,$$
$$4m + 2h = 258.$$

Odčítaním dvojnásobku prvej rovnice od druhej dostávame, že platí $2m = 78$, a teda $m = 39$. Potom

$$h = 90 - m = 90 - 39 = 51.$$

Na dvore bolo 39 mačiek a 51 husí.

4. Deti na oslave jedli bonboniéru. Keď dojedli, mamička odpratala obal a spýtala sa, či si pamätajú koľko bonbónov zjedli. Keďže nevedeli, rozhodla sa im pomôcť. Orieškových bonbónov bolo o 10 viac ako višňových, mliečnych trikrát toľko čo višňových a zároveň rovnako ako orieškových a višňových dohromady. Koľko bonbónov bolo akej príchuti?

Riešenie: Označme počet višňových bonbónov ako v. Potom orieškových bolo $v+10$, mliečnych $3v$ a zároveň aj $v+(v+10)$. Na základe počtu mliečnych bonbónov môžeme sformulovať rovnicu $3v=v+(v+10)$, odkiaľ po odčítaní $2v$ od oboch strán rovnice dostaneme, že platí $v=10$.

Dosadením tejto hodnoty do zadania dostávame, že višňových bonbónov bolo 10, orieškových $10+10=20$ a mliečnych $3\cdot 10=30$. Spolu ich bolo $10+20+30=60$.

5. Súčinom piatich prvočísel je šesťciferné číslo $ABCABC$, kde A, B a C sú cifry. Zistite hodnotu týchto cifier, ak viete, že jedno z týchto piatich prvočísel je 491.

Riešenie: Šesťciferné číslo $ABCABC$ môžeme zapísať aj ako $1\,001\cdot ABC$. Keďže platí $1\,001=7\cdot 11\cdot 13$, číslo ABC musí byť súčinom prvočísla 491 a iného prvočísla. Toto piate prvočíslo sa musí rovnať 2, pretože pre väčšie prvočísla p platí $491\cdot p\geq 491\cdot 3=1\,473$, čo už nie je trojciferné číslo. Preto $ABC=2\cdot 491=982$, a teda $A=9$, $B=8$, $C=2$.

6. Horolezecká výprava vytesala do ľadovca časť číselnej osi (1, 2, 3, ...). V tých dňoch našli horolezci na ľadovci stopy bájneho snežného muža, ktorý sa vybral na prechádzku po tejto číselnej osi. Jedna zo stôp pochádzala od mláďaťa, ktoré malo nohu č. 3 – zakrývala totiž tri po sebe idúce prirodzené čísla. Súčet týchto čísel bol 2016. Na inom mieste našli bádatelia oveľa väčšiu stopu dospelého jedinca. Aj pre túto stopu platilo, že súčet čísel, ktoré zakrývala, bol 2016. Aké najväčšie číslo nohy mohol mať dospelý snežný muž, ktorý sa prechádzal po číselnej osi?

Riešenie: Najväčšie číslo nohy pri danom súčte vieme dosiahnuť tak, že budú zakryté čo najmenšie prirodzené čísla, teda hneď od jednotky. Ak spočítame súčet prvých n prirodzených čísel, vieme, že sa rovná

$$\frac{1}{2}n(n+1).$$

Vyskúšame, či nám táto možnosť bude vyhovovať a budeme riešiť rovnicu

$$\frac{1}{2}n(n+1)=2\,016.$$

Túto rovnicu si postupne upravíme:

$$n(n+1)=4\,032=63\cdot 64,$$

odkiaľ dostávame dve možné hodnoty n: 63 alebo –64. Keďže hľadáme prirodzené čísla, vyhovuje nám len $n=63$, teda dospelý snežný muž mohol mať najväčšie číslo nohy 63, pričom zakryl čísla 1, 2, ..., 63.

7. Z dvoch podobných trojuholníkov má jeden obvod 100 jednotiek a druhý má strany postupne o 8, 14 a 18 jednotiek väčšie ako prvý. Vypočítajte dĺžky strán oboch trojuholníkov.

Riešenie: Označme dĺžky strán menšieho trojuholníka a, b, c. Keďže trojuholníky sú podobné, zodpovedajúce strany väčšieho majú veľkosti $a+8$, $b+14$, $c+18$. Obvod tohto trojuholníka potom bude

$$(a+8)+(b+14)+(c+18)=(a+b+c)+40=140 \text{ jednotiek.}$$

Na základe podobnosti trojuholníkov musí platiť:

$$\frac{a}{a+8}=\frac{b}{b+14}=\frac{c}{c+18}=\frac{a+b+c}{(a+8)+(b+14)+(c+18)}=\frac{100}{140}=\frac{5}{7}.$$

Keďže má platiť

$$\frac{a}{a+8}=\frac{5}{7},$$

po prenásobení oboch strán menovateľmi a úprave dostaneme, že platí

$$7a=5a+40,$$
$$2a=40,$$
$$a=20,\ a+8=28.$$

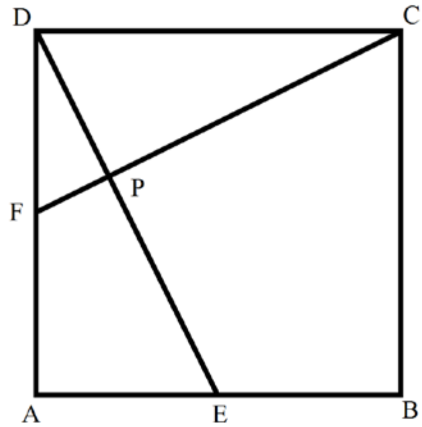
Analogicky dostaneme, že platí

$$\frac{b}{b+14}=\frac{5}{7},$$
$$7b=5b+70,$$
$$2b=70,$$
$$b=35,\ b+14=49;$$
$$\frac{c}{c+18}=\frac{5}{7},$$
$$7c=5c+90,$$
$$2c=90,$$
$$c=45,\ c+18=63.$$

Prvý trojuholník mal dĺžky strán 20, 35 a 45 jednotiek, druhý 28, 49 a 63 jednotiek.

8. Štvorec $ABCD$ má veľkosť strany 6 cm. Stredy strán AB a AD označme ako body E a F. Úsečky CF a DE rozdelia štvorec na štyri útvary. Vypočítajte obsahy týchto útvarov.

Riešenie: Označme priesečník úsečiek FC a DE ako P. Potom vyzerá situácia takto:



Trojuholníky AED a DFC sú zhodné podľa vety sus (uhly DAE a CDF sú pravé, $|CD|=|AD|=6$ cm, $|AE|=|FD|=3$ cm, pretože E, F sú stredy strán AB a AD). Potom majú zodpovedajúce si uhly rovnakú veľkosť, teda platí $|\angle AED|=|\angle DFC|$, $|\angle ADE|=|\angle DCF|$. Obsahy týchto dvoch trojuholníkov potom sú

$$S_{\Delta AED}=S_{\Delta DFC}=\frac{1}{2}\cdot|DF|\cdot|CD|=\frac{1}{2}\cdot 3\text{ cm}\cdot 6\text{ cm}=9\text{ cm}^2.$$

Na základe Pytagorovej vety v pravouhlom trojuholníku AED dostávame, že platí

$$|DE|=\sqrt{|DA|^2+|AE|^2}=\sqrt{36+9}\text{ cm}=\sqrt{45}\text{ cm}=3\sqrt{5}\text{ cm}.$$

Trojuholníky DPF a DAE sú podobné podľa vety uu, pretože $|\angle AED| = |\angle DFC| = |\angle DFP|$ a uhol pri vrchole D majú spoločný. Potom pre pomer ich strán platí

$$\frac{|DF|}{|DE|} = \frac{|DP|}{|DA|}.$$

Po dosadení známych hodnôt dostávame, že platí

$$\frac{3 \text{ cm}}{3\sqrt{5} \text{ cm}} = \frac{|DP|}{6 \text{ cm}}, \text{ teda } |DP| = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ cm}.$$

Keďže pomer obsahov podobných trojuholníkov sa rovná pomeru druhých mocnín dĺžok ich strán, dostávame, že platí

$$S_{\Delta DPF} = \frac{|DP|^2}{|AD|^2} \cdot S_{\Delta DAE} = \frac{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ cm}\right)^2}{(6 \text{ cm})^2} \cdot 9 \text{ cm}^2 = \frac{9}{5} \text{ cm}^2.$$

Potom už ľahko dopočítame zvyšné obsahy:

$$S_{AEPF} = S_{\Delta CDP} = S_{\Delta CDF} - S_{\Delta PDF} = \left(9 - \frac{9}{5}\right) \text{cm}^2 = \frac{36}{5} \text{ cm}^2,$$

$$S_{BEPC} = S_{ABCD} - S_{AEPF} - S_{\Delta CDF} = \left(36 - \frac{36}{5} - 9\right) \text{cm}^2 = \frac{99}{5} \text{ cm}^2.$$

Hľadané obsahy útvarov sú $\frac{9}{5}$ cm^2, $\frac{36}{5}$ cm^2, $\frac{36}{5}$ cm^2, $\frac{99}{5}$ cm^2.

9. Dokážte, že číslo $2^{1092} - 1$ je deliteľné číslom 1093^2.

Riešenie: Označme $p = 1\,093$. Potom $p^2 = 1\,194\,649$. Ľahko nahliadneme, že platí

$$3^7 = 2\,187 = 2p + 1,$$

$$3^{14} = \left(3^7\right)^2 = (2p+1)^2 = 4p^2 + 4p + 1 \equiv 4p + 1 \left(\text{mod } p^2\right),$$

$$2^{14} = 16\,384 = 15p - 11,$$

$$2^{28} = (15p - 11)^2 \equiv -330p + 121 \left(\text{mod } p^2\right),$$

$$3^2 \cdot 2^{28} \equiv -2\,970p + 1\,089 = -2\,969p - 4 \equiv -1\,876p - 4 \left(\text{mod } p^2\right),$$

$$3^2 \cdot 2^{26} \equiv -469p - 1 \left(\text{mod } p^2\right),$$

pretože 4 a 1 093 sú nesúdeliteľné. Potom platí aj

$$3^{14} \cdot 2^{182} = \left(3^2 \cdot 2^{26}\right)^7 \equiv (-469p - 1)^7 \equiv -3\,283p - 1 \equiv$$
$$\equiv -4p - 1 \equiv -3^{14} \left(\text{mod } p^2\right).$$

Keďže 3^{14} a $p = 1\,093$ sú nesúdeliteľné čísla, aj 3^{14} a p^2 sú nesúdeliteľné, a tak platí, že $2^{182} \equiv -1 \left(\text{mod } p^2\right)$. Umocnením tejto kongruencie na šiestu dostávame, že platí

$$2^{1092} = \left(2^{182}\right)^6 \equiv (-1)^6 = 1 \left(\text{mod } p^2\right),$$

a teda platí, že $2^{1092} - 1$ je deliteľné číslom $p^2 = 1093^2$.

10. Nájdite všetky prirodzené čísla m, n, ktoré sú riešeniami rovnice $2^m - 3^n = 7$.

Riešenie: Platí $3^n + 7 \equiv 7 \equiv 1 \left(\text{mod } 3\right)$ a $2^m \equiv (-1)^m \left(\text{mod } 3\right)$, teda m musí byť párne. Ľahko overíme, že pre $m = 1, 2$ rovnica nemá riešenie, a tak platí, že $2^m \equiv 0 \left(\text{mod } 8\right)$. Potom musí platiť $3^n = 2^m - 7 \equiv 1 \left(\text{mod } 8\right)$, a teda n musí byť párne (nepárne mocniny trojky dávajú zvyšok 3 po delení 8). Potom platí

$$\left(2^{m/2} + 3^{n/2}\right) \cdot \left(2^{m/2} - 3^{n/2}\right) = 7.$$

Z toho vyplýva, že $2^{m/2} + 3^{n/2}$ musí byť 1 alebo 7, keďže oba činitele sú prirodzené čísla. Keďže hodnota tohto výrazu je aspoň 5 (oba exponenty majú hodnotu aspoň 1), musí platiť $2^{m/2} + 3^{n/2} = 7$. Keďže $3^2 = 9$, musí platiť $n/2 = 1$, a teda $n = 2$. Potom musí platiť $2^{m/2} = 4$, a teda $m = 4$.

Úloha má jediné riešenie $m = 4$ a $n = 2$.

Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Ak zväčšíme stranu štvorca o 30 %, zväčší sa jeho obvod o 12 m. Aká je dĺžka strany pôvodného štvorca v metroch?

2. Zistite, na koľko častí vieme rozdeliť trojuholník dvoma rôznymi úsečkami.

3. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré sa po preškrtnutí poslednej cifry zmenšia štvornásobne.

4. Štyria kamaráti sa vážili tak, že sa na váhu postavili vždy práve traja. Postupne vážili 155,5 kg, 152,8 kg, 158,1 kg a 157,3 kg. Koľko vážia jednotliví kamaráti?

5. Určte všetky trojciferné čísla ABC, ktoré sa rovnajú súčtu dvojciferných čísel AB, AC, BA, BC, CA a CB.

6. Vypočítajte dĺžku uhlopriečky AC v kosoštvorci $ABCD$, ak strana kosoštvorca má dĺžku 20 dm a druhá uhlopriečka BD má dĺžku 24 dm.

7. Riešte rovnicu $x^2 + \sqrt{x+5} = 5$ v reálnych číslach.

8. Štvorec $ABCD$ má veľkosť strany 6 cm. Stred strany AB označíme ako bod E. Úsečky AC a DE rozdelia štvorec na štyri útvary. Vypočítajte obsahy týchto útvarov.

9. Nech k je najmenšie prirodzené číslo také, že číslo $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ je deliteľné číslom 1 000 000. Aký je ciferný súčet čísla k?

10. Dokážte, že ak sú M aj $M^2 + 2$ prvočísla, tak aj $M^3 + 2$ je prvočíslo.

11. Zistite, či existuje množina 4 024 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 013-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 013.

12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom
$$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1},$$
pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť: $\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n \cdot (n!)^2$

Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 6. 3. 2017