VÝSLEDKOVÁ LISTINA 10. ROČNÍKA KOREŠPONDENČNEJ SÚŤAŽE

Por.	Priezvisko a meno	Škola	Ročník	PS	1 – 20	21	22	23	24	25	Spolu
1	Špaček Oliver	ZŠ s MŠ Liptovský Ján	9	64	43	5	6	7	8	9	142
2	Píľa Jozef	ZŠ Námestie Štefana Kluberta, Levoča	7	61	43	5	6	7	2	8	132
3	Dúbravec Aurel	ZŠ s MŠ Hradná, Liptovský Hrádok	5	55	35	3	3	7	8	5	116
4	Motyková Veronika	ZŠ Námestie Štefana Kluberta, Levoča	9	50	40	5	6	7	1	5	114
5	Bežovská Diana	ZŠ J. A. Komenského 1, Michalovce	7	56	40	5	5	1	0	1	108
6	Pavol Marek	ZŠ Námestie Štefana Kluberta, Levoča	9	54	43	5	4	0	0	0	106
7	Kondášová Mária	ZŠ s MŠ Štefana Ďurovčíka, Palín	9	54	38	5	5	2	0	1	105
8	Buc Radovan	ZŠ s MŠ Liptovský Ján	6	46	42	3	0	7	0	5	103
8	Bežovská Daniela	ZŠ J. A. Komenského 1, Michalovce	7	51	40	5	5	1	0	1	103
8	Kollárik Štefan	OG D. Tatarku, Poprad	6	53	44	3	0	1	1	1	103
11	Horňáková Lívia	ZŠ s MŠ Štefana Ďurovčíka, Palín	9	53	39	4	4	1	0	1	102
12	Madejová Daniela	SOŠ Svit	1	43	41	4	4	7	0	1	100
13	Kyseľ Tomáš	ZŠ s MŠ Liptovský Ján	6	51	33	4	0	7	0	0	95
13	Baranová Jana	ZŠ Námestie Štefana Kluberta, Levoča	9	51	38	5	0	0	1	0	95
15	Filippova Oľga	ZŠ s MŠ Liptovský Ján	6	41	33	4	4	6	0	5	93
16	Grivalský Jakub	SOŠ Svit	3	48	35	0	0	7	1	1	92
17	Kovalčíková Klára	SOŠ Svit	1	47	39	3	0	0	0	1	90
18	Repaský Damián	ZŠ Námestie Štefana Kluberta, Levoča	5	47	39	1	1	0	0	0	88
19	Peniaková Denisa	SOŠ Svit	1	44	36	3	4	0	0	0	87
20	Marciníková Andrea	SOŠ Svit	3	40	35	0	0	7	0	0	82
21	Kormancová Lucia	SOŠ Svit	2	44	30	0	0	7	0	0	81
22	Kellnerová Katarína	ZŠ Námestie Štefana Kluberta, Levoča	5	44	35	0	0	0	0	0	79
23	Kováč Daniel	ZŠ Mierová, Svit	6	38	35	3	0	0	0	0	76
24	Ohraďanová Mária	ZŠ s MŠ Liptovský Ján	6	0	34	4	0	7	0	4	49
25	Sokolová Kristína	ZŠ s MŠ Liptovský Ján	8	45	0	0	0	0	0	0	45
26	Vašák Blažej	ZŠ Námestie Štefana Kluberta, Levoča	5	44	0	0	0	0	0	0	44
27	Gutová Zoja	ZŠ Námestie Štefana Kluberta, Levoča	5	39	0	0	0	0	0	0	39

MATMIX

Riešenia 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Ak zväčšíme stranu štvorca o 30 %, zväčší sa jeho obvod o 12 m. Aká je dĺžka strany pôvodného štvorca v metroch?

Riešenie: Označme dĺžku strany pôvodného štvorca v metroch ako a. Potom obvod pôvodného štvorca je $4a$. Dĺžka strany zväčšeného štvorca je $1{,}3a$ a jeho obvod je $4 \cdot 1{,}3a = 5{,}2a$. Rozdiel obvodov väčšieho a menšieho štvorca je $5{,}2a - 4a = 1{,}2a$. Tento rozdiel sa rovná 12 metrom, teda musí platiť $1{,}2a = 12$, teda $a = 10$. Dĺžka strany pôvodného štvorca je 10 metrov.

2. Zistite, na koľko častí vieme rozdeliť trojuholník dvoma rôznymi úsečkami.

Riešenie: Ak pretneme nejaký útvar, ktorý je tvorený n časťami, úsečkou, počet častí vzniknutého útvaru môže byť maximálne $2n$, pretože každá pôvodná časť môže byť úsečkou rozdelená na maximálne dve časti. Preto jedna úsečka môže rozdeliť trojuholník na maximálne 2 časti a dve úsečky rozdelia trojuholník na maximálne štyri časti. To, že sa každý počet častí (1, 2, 3, 4) dá dosiahnuť, ľahko overíme napríklad pomocou nasledujúcich obrázkov:

3. Nájdite všetky prirodzené čísla, ktoré sa po preškrtnutí poslednej cifry zmenšia štvornásobne.

Riešenie: Jednociferné prirodzené čísla zrejme nevyhovujú, pretože preškrtnutím poslednej číslice nedostaneme žiadne číslo (ak by sme ho považovali za nulu, tak to nie je prirodzené číslo, teda ani táto možnosť nevyhovuje).

Ak uvažujeme dvojciferné a väčšie prirodzené čísla, môžeme ich zapísať v tvare $10a + b$, kde a je prirodzené číslo a b je cifra (0, 1, ..., 9).

Škrtnutím poslednej cifry dostaneme číslo a. Potom má platiť $10a + b = 4 \cdot a$, odkiaľ dostaneme, že má platiť $6a + b = 0$, čo však nemôže platiť, pretože a je prirodzené číslo, a teda ľavá strana rovnice bude určite väčšia ako 0. Preto neexistujú prirodzené čísla, ktoré by vyhovovali zadaniu úlohy.

4. Štyria kamaráti sa vážili tak, že sa na váhu postavili vždy práve traja. Postupne vážili 155,5 kg, 152,8 kg, 158,1 kg a 157,3 kg. Koľko vážia jednotliví kamaráti?

Riešenie: Ak sčítame všetky štyri uvedené hmotnosti, dostaneme súčet 623,7 kg. V ňom je hmotnosť každého kamaráta započítaná trikrát, pretože každý z nich chýbal v práve jednom vážení. Preto bude súčet hmotností kamarátov

$$623{,}7 \text{ kg} : 3 = 207{,}9 \text{ kg}.$$

Odčítaním hmotností troch kamarátov od súčtu hmotností všetkých štyroch kamarátov postupne dostaneme, že hmotnosť prvého je 207,9 kg – 155,5 kg = 52,4 kg, hmotnosť druhého je 207,9 kg – 152,8 kg = 55,1 kg, hmotnosť tretieho je 207,9 kg – 158,1 kg = 49,8 kg, hmotnosť štvrtého je 207,9 kg – 157,3 kg = 50,6 kg.

Hmotnosti kamarátov sú 52,4 kg, 55,1 kg, 49,8 kg a 50,6 kg.

5. Určte všetky trojciferné čísla ABC, ktoré sa rovnajú súčtu dvojciferných čísel AB, AC, BA, BC, CA a CB.

Riešenie: Na základe zadania má platiť nasledujúca rovnosť:

$$100A + 10B + C = (10A + B) + (10A + C) + (10B + A) + \\ + (10B + C) + (10C + A) + (10C + B).$$

Jej úpravou dostaneme, že má platiť

$$100A + 10B + C = 22 \cdot (A + B + C).$$

To znamená, že C musí byť párne číslo a číslo ABC musí byť deliteľné jedenástimi. Na základe kritéria deliteľnosti jedenástimi vieme, že $A - B + C$ musí byť deliteľné jedenástimi. Keďže A, B, C sú cifry, tento výraz môže nadobúdať hodnoty len od –8 po 18, a teda to môžu byť len hodnoty 0 a 11.

V prvom prípade platí $A - B + C = 0$, teda $B = A + C$. Dosadením tohto vzťahu do vyššie uvedenej rovnice dostaneme, že platí

$$100A + 10(A + C) + C = 22 \cdot (A + (A + C) + C),$$
$$110A + 11C = 44A + 44C,$$
$$66A = 33C,$$
$$2A = C.$$

Potom platí

$$B = A + C = 3A.$$

Za A teraz postupne dosadíme jednotlivé možné hodnoty (1, 2, 3, väčšie už nie, pretože potom by B bolo väčšie ako 9) a dostaneme, že riešením úlohy sú tri čísla: 132, 264, 396.

V druhom prípade platí

$$A - B + C = 11,$$

teda

$$B = A + C - 11.$$

Dosadením tohto vzťahu do vyššie uvedenej rovnice dostaneme, že platí

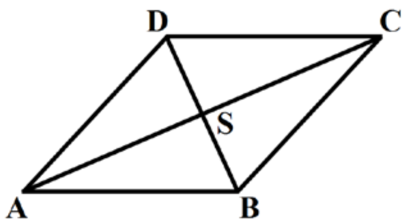
$$100A + 10(A + C - 11) + C = 22 \cdot (A + (A + C - 11) + C),$$
$$110A + 11C - 110 = 44A + 44C - 242,$$
$$66A + 132 = 33C,$$
$$2A + 4 = C.$$

Potom $B = A + C - 11 = 3A - 7$. Za A teraz postupne dosadíme jednotlivé možné hodnoty (1, 2, väčšie už nie, pretože potom by C bolo väčšie ako 9) a dostaneme, že v tomto prípade úloha nemá riešenie, pretože hodnoty B vychádzajú záporné.

Riešením úlohy sú tri čísla: 132, 264, 396.

6. Vypočítajte dĺžku uhlopriečky AC v kosoštvorci $ABCD$, ak strana kosoštvorca má dĺžku 20 dm a druhá uhlopriečka BD má dĺžku 24 dm.

Riešenie: Označme priesečník uhlopriečok ako S.



Keďže uhlopriečky sa v kosoštvorci rozpoľujú a sú na seba kolmé, platí

$$|BS| = |BD| : 2 = 12 \text{ cm}.$$

V trojuholníku ABS platí Pytagorova veta, a tak postupne dostaneme, že platí:

$$|AB|^2 = |BS|^2 + |AS|^2,$$
$$400 \text{ dm}^2 = 144 \text{ dm}^2 + |AS|^2,$$
$$256 \text{ dm}^2 = |AS|^2,$$
$$16 \text{ dm} = |AS|,$$

a teda $|AC| = 2 \cdot |AS| = 32$ cm.

Uhlopriečka AC v kosoštvorci $ABCD$ má dĺžku 32 cm.

7. Riešte rovnicu $x^2+\sqrt{x+5}=5$ v reálnych číslach.

Riešenie: Prevedením x^2 na pravú stranu dostaneme rovnicu $\sqrt{x+5}=5-x^2$, odkiaľ dostávame podmienku, že musí platiť $x^2\le 5$. Umocnením tejto rovnice dostaneme (neekvivalentnú) rovnicu $x^4-10x^2-x+20=0$. Túto rovnicu si rozpíšeme ako súčin dvoch polynómov druhého stupňa:

$$0=x^4-10x^2-x+20=\left(x^2+ax+b\right)\cdot\left(x^2+cx+d\right),$$

kde a, b, c, d sú reálne čísla. Roznásobením pravej strany a porovnaním koeficientov pri zodpovedajúcich mocninách x dostaneme sústavu rovníc

$$a+c=0,$$
$$ac+b+d=-10,$$
$$ad+bc=-1,$$
$$bd=20.$$

Z poslednej rovnice budeme hľadať hodnoty b a d medzi celočíselnými deliteľmi čísla 20 a zistíme, že sústava má riešenie $a=1$, $b=-4$, $c=-1$, $d=-5$. To znamená, že platí

$$\left(x^2+x-4\right)\cdot\left(x^2-x-5\right)=0.$$

Stačí nám vyriešiť dve kvadratické rovnice: $x^2+x-4=0$ a $x^2-x-5=0$. Ich koreňmi sú

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\ x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2},\ x_3=\frac{1+\sqrt{21}}{2},\ x_4=\frac{1-\sqrt{21}}{2}.$$

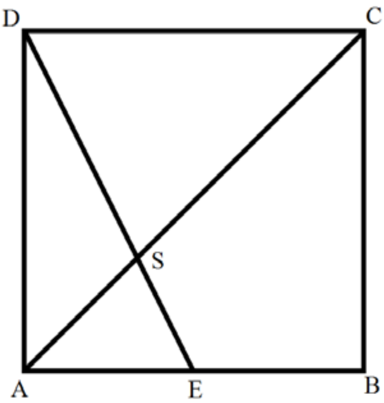
Podmienku $x^2\le 5$ spĺňajú len dva z nich:

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2},\ x_4=\frac{1-\sqrt{21}}{2}.$$

Skúškou sa presvedčíme, že oba uvedené korene sú riešením rovnice zo zadania.

8. Štvorec $ABCD$ má veľkosť strany 6 cm. Stred strany AB označíme ako bod E. Úsečky AC a DE rozdelia štvorec na štyri útvary. Vypočítajte obsahy týchto útvarov.

Riešenie: Označme priesečník úsečiek AC a DE ako S.



Trojuholníky ASE a CSD sú podobné podľa vety uu, pretože majú dva rovnaké uhly – uhol pri vrchole S je vrcholový a uhly SAE a SCD sú striedavé.

Keďže $|AE|:|CD|=3\text{ cm}:6\text{ cm}=1:2$, budú v rovnakom pomere aj ich výšky. Keďže súčet výšok z vrcholu S na príslušné strany v oboch trojuholníkoch je 6 cm, bude mať výška z vrcholu S v trojuholníku ASE veľkosť 2 cm a výška z vrcholu S v trojuholníku CDS veľkosť 4 cm. Potom pre obsahy trojuholníkov ASE a CDS dostávame:

$$S_{\Delta AES}=\frac{1}{2}\cdot|AE|\cdot v_{AE}=\frac{1}{2}\cdot 3\text{ cm}\cdot 2\text{ cm}=3\text{ cm}^2,$$

$$S_{\Delta CDS}=\frac{1}{2}\cdot|CD|\cdot v_{CD}=\frac{1}{2}\cdot 6\text{ cm}\cdot 4\text{ cm}=12\text{ cm}^2.$$

Trojuholník AED má obsah

$$S_{\Delta AED}=\frac{1}{2}\cdot|AE|\cdot|AD|=\frac{1}{2}\cdot 3\text{ cm}\cdot 6\text{ cm}=9\text{ cm}^2,$$

preto platí

$$S_{\Delta ASD}=S_{\Delta AED}-S_{\Delta AES}=9\text{ cm}^2-3\text{ cm}^2=6\text{ cm}^2.$$

Napokon vypočítame obsah štvoruholníka $EBCS$:

$$S_{EBCS}=S_{ABCD}-S_{\Delta AED}-S_{\Delta CDS}=$$
$$=36\text{ cm}^2-9\text{ cm}^2-12\text{ cm}^2=15\text{ cm}^2.$$

Hľadané útvary majú obsahy 3 cm^2, 6 cm^2, 12 cm^2 a 15 cm^2.

9. Nech k je najmenšie prirodzené číslo také, že číslo $k!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k$ je deliteľné číslom 1 000 000. Aký je ciferný súčet čísla k?

Riešenie: Keďže platí $1\,000\,000=2^6\cdot 5^6$, musí $k!$ obsahovať súčin šiestich pätiek (dvojok bude dosť, pretože každý druhý činiteľ je deliteľný dvomi). Najmenšie prirodzené čísla deliteľné piatimi sú 5 (1. päťka), 10 (2.), 15 (3.), 20 (4.), 25 (5. a 6.). Keďže 25 obsahuje vo svojom prvočíselnom zápise dve päťky, bude už číslo 25! deliteľné 5^6, a teda bude deliteľné aj číslom 1 000 000. Ciferný súčet čísla 25 je 7, a teda aj ciferný súčet čísla k je 7.

10. Dokážte, že ak sú M aj M^2+2 prvočísla, tak aj M^3+2 je prvočíslo.

Riešenie: Ak M nie je prvočíslo, potom tvrdenie triviálne platí, lebo ide o implikáciu s predpokladom, ktorý má pravdivostnú hodnotu 0.

Nech M je prvočíslo. Ak je M deliteľné tromi, musí platiť $M=3$, lebo M je aj prvočíslo. Potom $M^2+2=11$, čo je prvočíslo, a $M^3+2=29$ je tiež prvočíslo. Teda tvrdenie platí.

Ak M dáva po delení tromi zvyšok 1, môžeme ho písať v tvare $M=3k+1$, kde k je nezáporné celé číslo, pretože M je prvočíslo, a teda je väčšie ako 1. Potom

$$M^2+2=(3k+1)^2+2=3\cdot\left(3k^2+2k+1\right),$$

čo znamená, že M^2+2 má dva delitele väčšie ako 1, lebo platí

$$3k^2+2k+1\ge 6.$$

Z toho vyplýva, že M^2+2 nie je prvočíslo. To znamená, že predpoklad implikácie zo zadania má pravdivostnú hodnotu 0, a teda implikácia platí.

Podobne, ak M dáva po delení tromi zvyšok 2, môžeme ho písať v tvare $M=3k+2$, kde k je nezáporné celé číslo. Potom platí

$$M^2+2=(3k+2)^2+2=3\cdot\left(3k^2+4k+2\right),$$

čo znamená, že M^2+2 má dva delitele väčšie ako 1, lebo

$$3k^2+4k+2\ge 2,$$

teda M^2+2 nie je prvočíslo a implikácia má opäť predpoklad s pravdivostnou hodnotou 0, teda implikácia platí.

Keďže sme vyčerpali všetky možnosti pre M, tvrdenie je dokázané.