a) Nakresli situačný obrázok. Urč, na ktorom konci hojdačky sedela Anetka a na ktorom Hanka v tomto prípade.
b) Vyslov a napíš podmienku rovnováhy hojdačky a vypočítaj hmotnosť m_2 Hanky.
c) Túto hojdačku dievčatá mienili používať aj dlhšie napriek tomu, že s vekom ich hmotnosť rástla. Nakresli graf, v ktorom na vodorovnú os (x) vyznačíš hmotnosť Anetky a na zvislú os hmotnosť Hanky v niekoľkých rokoch ich veku, ak sa mala stále udržovať rovnováha pri hojdaní.

5. Rôzne zdroje energie

Získavanie energie zo zdrojov, najmä v niektorých jej formách, je pre obyvateľstvo, dopravu, výrobu a každodenný život prioritou. Všade vo svete sa venuje otázke zdrojov energie, ale aj úspornému využívaniu energií, prvoradý význam. Dôležitosť a výnimočnosť tejto otázky umocňuje skutočnosť, že získavanie energií úzko súvisí s kvalitou životného prostredia.

a) Vymenuj najmenej päť primárnych zdrojov energie, ktoré sa uplatňujú v každodennom živote obyvateľov a vo výrobe.
b) Zoznám sa s pojmom slnečná konštanta k = 1 360 W/m^2, stručne ju definuj a vysvetli možnosti jej používania pre prax.
c) Aký je rozdiel medzi obnoviteľnými a neobnoviteľnými primárnymi zdrojmi energie? Vymenuj pre každú skupinu aspoň tri zdroje.
d) Medzi najvýznamnejšie zdroje na výrobu elektrickej energie historicky i v súčasnosti patria vodné elektrárne postavené na tokoch riek. Nakresli jednoduchý fyzikálny model vodnej elektrárne, ak predpokladáš, že stály vodný tok $Q = V / t$ (V je objem vody, ktorý pretečie za čas t) prekonáva výškový rozdiel h v gravitačnom poli zeme ($g \approx 10$ N/kg). Urč výkon P vodného toku $Q \approx 1{,}00$ l/s pre $h \approx 1{,}00$ m, $h_2 \approx 10{,}0$ m a $\rho \approx 1\,000$ kg/m^3 (hustota vody).
e) Janko chcel porovnať technickú náročnosť, výhody a nevýhody vyhotovenia slnečného kolektora s vodným tokom, ktorý mal k dispozícii neďaleko chaty. Výškový rozdiel vodného toku, ktorý mohol dosiahnuť potôčiku bol $h_o \approx 4{,}3$ m. Urč hodnotu Q_o vodného toku, ktorým by dosiahol rovnaký výkon ako zo slnečného kolektora s plochou povrchu $S \approx 1{,}0$ m^2 za ideálnych podmienok. Aké výhody, či nevýhody majú jednotlivo obe navrhované riešenia?

Autori úloh: Kategória E: D. Kluvanec (1., 2., 5., 6., 7.), A. Teleki (3.), B. Lacsný (4.); Kategória F: D. Kluvanec (1., 2., 3., 4., 6., 7.), A. Teleki (5.); Kategória G: D. Kluvanec (1., 5.), A. Teleki (2.), B. Lacsný (3.,4.)

MATMIX

Riešenia 3. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Francúzsky matematik Lucas pripravil nasledujúcu hru: na jedenástich poliach je 5 bielych a 5 čiernych figúr. Figúry možno ťahať buď na susedné pole (ak je voľné), alebo preskočiť cez jednu figúrku na ďalšie voľné pole. Biele sa musia pohybovať len doprava, čierne len doľava.

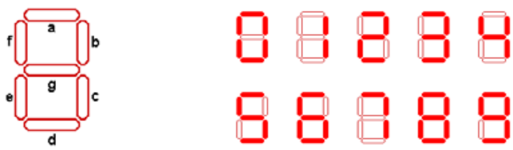
B	B	B	B	B		Č	Č	Č	Č	Č

Napíšte postup, ktorým dokážeme vymeniť úplne ich pôvodné postavenie (biele figúrky budú vpravo a čierne vľavo).

Riešenie: Označme políčka zľava doprava číslami 1 až 11. Potom jeden z dvoch možných postupov je nasledujúci (číslo udáva, ktorou figúrkou sa bude ťahať – spôsob ťahu je jednoznačný, pretože máme zadefinovaný smer pohybu bielych aj čiernych figúrok a z jej polohy zároveň vyplýva aj to, či sa posunie na susedné pole, alebo preskočí susednú figúrku): 5 7 8 6 4 3 5 7 9 10 8 6 4 2 1 3 5 7 9 11 10 8 6 4 2 3 5 7 9 8 6 4 5 7 6. Druhý postup je symetrický – nezačneme bielou figúrkou, ale čiernou.

2. Zoberte si (staršiu) kalkulačku a prezrite si, ako sa na nej zobrazujú jednotlivé číslice. Teraz si predstavte, že sa dve zo siedmich zobrazovacích políčok pokazia. Ktoré to musia byť, aby ste stále dokázali jednoznačne určiť, ktorá číslica je ktorá?

Riešenie: Aby sme dokázali jednoznačne určiť, ktorá číslica sa zobrazuje, musí byť pokazené dolné a pravé dolné políčko. Ukážeme si to vylučovacou metódou.



Označme si jednotlivé políčka podľa obrázka vľavo hore. Na obrázku vpravo hore máme zobrazené všetky číslice od 0 po 9. Číslice 0 a 8 sa líšia len v políčku g, takže toto políčko musí určite ostať funkčné. Podobne číslice 6 a 8 sa líšia len v políčku b a číslice 9 a 8 v políčku e, takže aj políčka b a e musia ostať funkčné. Číslice 1 a 7 sa líšia len v políčku a, teda aj toto políčko musí zostať funkčné. Číslice 3 a 9 sa líšia len v políčku f, a teda aj toto políčko musí zostať funkčné. Týmto sme vylúčili 5 políčok, a teda jediné dve, ktoré zostali, sú políčka c a d. Ak tieto dve políčka nebudú fungovať, dostaneme nasledujúce „číslice“:

Teraz už ľahko overíme, že žiadne dve z týchto „číslic“ nie sú rovnaké, a teda sme našli požadované riešenie.

3. Na stole je 10 minci, z toho niekoľko má na spodnej časti bielu nálepku. Traja súrodenci Adam, Boris a Cyril sa s nimi raz začali hrať. Najskôr si Adam vybral tri mince a na papier si zaznačil koľko z nich bolo s nálepkou. Potom mince vrátil na ich pôvodné miesto. Následne to isté zopakoval aj Boris a Cyril a pokračovali dookola. Každý si priebežne zaznačoval, ktoré tri mince už boli spolu ťahané a rovnaký výber si už potom nikto nemohol vytiahnuť. Takto sa striedali dovtedy, kým Adam povedal, že už nemôže vyberať. Pozreli sa na svoje výsledky. Adam a Boris priznali, že nemali prípad, kedy by všetky tri mince boli bez nálepky. Cyril sa potom pochválil s tým, že jemu sa na každý druhýkrát podarilo vybrať všetky tri bez nálepky. Koľko mincí malo nálepku?

Riešenie: Keďže mincí bolo 10 a súrodenci vyskúšali všetky možné trojice, týchto trojíc bolo $\binom{10}{3} = 120$.

Keďže sa postupne striedali, tak každý z nich vybral práve 120 : 3 = 40 trojíc. Cyril vytiahol každú druhú trojicu mincí bez nálepiek, takže dokopy vytiahol 40 : 2 = 20 rôznych trojíc mincí bez nálepiek. To sú zároveň všetky možné trojice vytvorené z mincí bez nálepiek. Ak je týchto mincí bez nálepiek n, potom počet všetkých trojíc, ktoré sa z nich dajú vytvoriť, je $\binom{n}{3}$, a teda musí platiť $\binom{n}{3} = 20$.

Keďže platí

$$\binom{5}{3} = 10, \binom{6}{3} = 20, \binom{7}{3} = 35,$$

mincí bez nálepiek bolo 6, a teda 4 mince mali nálepku (so zvyšujúcim sa n rastie aj hodnota $\binom{n}{3}$, a teda pre $n > 6$ bude hodnota výrazu $\binom{n}{3}$ väčšia ako 20).

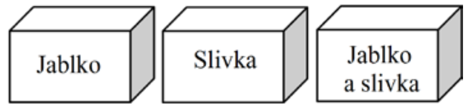
4. Koľko existuje trojciferných prirodzených čísel takých, že ich druhá aj tretia mocnina končia na tú istú číslicu?

Riešenie: Zapíšme si do tabuľky číslice a posledné číslice ich druhých a tretích mocnín (posledná číslica druhej a tretej mocniny prirodzeného čísla závisí len od poslednej číslice tohto čísla):

Číslica	**0**	**1**	2	3	4	**5**	**6**	7	8	9
2. mocnina	**0**	**1**	4	9	6	**5**	**6**	9	4	1
3. mocnina	**0**	**1**	8	7	4	**5**	**6**	3	2	9

Ľahko nahliadneme, že vyhovujúcimi poslednými číslicami sú len 0, 1, 5 a 6. Potom nám vyhovujú všetky prirodzené čísla tvaru 10X, 11X, ..., 99X, kde X je vyššie uvedená číslica. Týchto čísel je 90 pre každé X, a teda celkový počet hľadaných čísel je 4 . 90 = 360.

5. Máme tri škatule. V jednej je jablko, v druhej slivka, v tretej jablko a slivka. Ale každá z nich je zle označená. Môžeme vytiahnuť iba jeden kus ovocia z iba jednej škatule. Ako zistíme, čo je v ktorej škatuli?



Riešenie: Vyberieme jeden kus ovocia zo škatule s textom Jablko a slivka. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že je to slivka. To znamená, že to môže byť škatuľa, v ktorej je buď slivka alebo jablko a slivka. Keďže škatule sú zle označené, tak tam nemôže byť jablko so slivkou. Preto je tam len slivka. Jablko nemôže byť v škatuli s názvom Jablko, preto musí byť v škatuli s názvom Slivka. Napokon jablko a slivka budú v škatuli s názvom Jablko.

6. V neprieh¾adnej obálke je 100 lístkov, na ktorých sú napísané prirodzené čísla od 1 po 100. Na každom je iné číslo. Najmenej koľko lístkov musíme so zatvorenými očami vytiahnuť z obálky, aby sme mali istotu, že súčin všetkých čísel na vytiahnutých lístkoch je deliteľný 4?

Riešenie: Aby sme dostali súčin deliteľný štyrmi, musia byť buď aspoň dve čísla deliteľné dvomi alebo aspoň jedno deliteľné štyrmi. Najhorším prípadom, ktorý môže nastať, je, že vytiahneme najprv všetky nepárne čísla (tých je 50) – vtedy ich súčin nebude deliteľný ani 2. Ak teraz vytiahneme 51. číslo, stále nemusí byť deliteľné 4 (napr. 2). Preto musíme vytiahnuť ešte jedno číslo – 52. číslo. Tak budeme mať v súčine aspoň dve párne čísla, a teda celý súčin bude deliteľný 4.

Musíme vytiahnuť aspoň 52 čísel.

7. Na ukazovateli prejdených kilometrov v aute bolo na štarte pretekov zobrazené číslo 10. S týmto autom sme 12-krát absolvovali ten istý okruh a odčítali stav ukazovateľa pri prechode štartom. Výsledky sú v tabuľke. Akú dĺžku má okruh za predpokladu, že do začiatku počítania auto prešlo presne 10,75 km? (Keď je na ukazovateli napr. číslo 50, dovtedy prejdená vzdialenosť je aspoň 50 km a zároveň menej ako 51 km).

Okruhy	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Km	10	14	17	21	25	28	32	36	39	43	46	50	54

Riešenie: Po prvom prejdení okruhu prešlo auto dráhu z intervalu $\langle 14-10,75; 15-10,75)$, a teda dĺžka jedného okruhu je z intervalu $\langle 13/4; 17/4)$. Po druhom prejdení okruhu prešlo auto dráhu z intervalu $\langle 17-10,75; 18-10,75)$, a teda dĺžka jedného okruhu je z intervalu $\langle (17-10,75):2; (18-10,75):2)$, teda $\langle 25/8; 29/8)$. Takto by sme prešli všetkých 12 okruhov.

Dôležitý je ešte siedmy okruh – po jeho prejdení prešlo auto dráhu z intervalu $\langle 36-10,75; 37-10,75)$, a teda dĺžka jedného okruhu je z intervalu $\langle (36-10,75):7; (37-10,75):7)$, teda $\langle 101/28; 105/28)$.

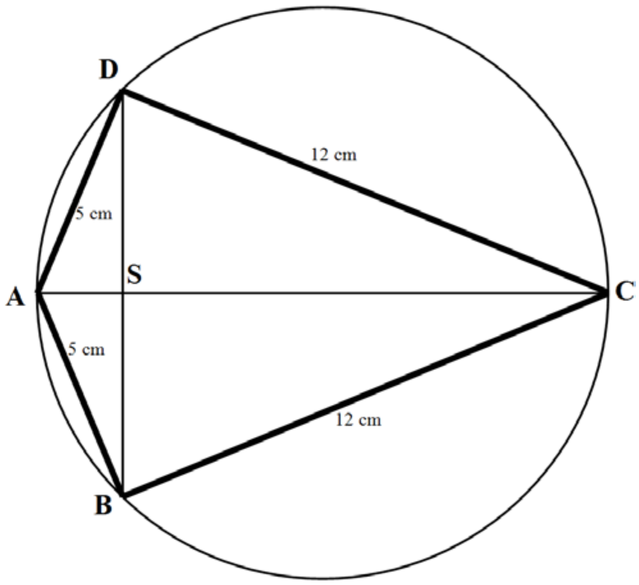
Prienikom získaných 12 intervalov možnej dĺžky okruhu je interval $\langle 101/28; 29/8)$, ktorý predstavuje všetky vyhovujúce dĺžky okruhu v kilometroch.

8. Do kružnice je vpísaný štvoruholník, ktorého dve strany majú dĺžku 12 cm a dve 5 cm, a ktorého uhlopriečky majú rôzne dĺžky. Vypočítajte ich dĺžky.

Riešenie: Keďže dve a dve strany štvoruholníka majú rovnaké dĺžky, môžu nastať dva základné prípady – strany rovnakej dĺžky nemajú spoločný vrchol alebo spoločný vrchol majú.

V prvom prípade to znamená, že strany dĺžky 12 cm susedia so stranami dĺžky 5 cm, teda protiľahlé strany majú rovnaké dĺžky, teda ide o rovnobežník. Avšak rovnobežníku sa nedá opísať kružnica okrem špeciálneho prípadu, ktorým je obdĺžnik. Ten má však obe uhlopriečky rovnako dlhé, a tak nevyhovuje. Preto v prvom prípade nedostávame vyhovujúce riešenie úlohy.

V druhom prípade to znamená, že tieto dve 12 cm strany sú susedné. Potom sú aj dve 5 cm strany susedné. Tento štvoruholník teda bude osovo súmerný podľa jednej uhlopriečky. Keďže sa mu súčasne dá opísať kružnica, táto uhlopriečka (vzhľadom na vyššie uvedenú symetriu) bude zároveň priemerom tejto kružnice. Označme si vrcholy štvoruholníka podľa nasledujúceho obrázka.



Keďže AC je priemerom kružnice, podľa Tálesovej vety sú uhly ADC a ABC pravé, a teda v trojuholníku ADC platí Pytagorova veta. Pomocou nej vypočítame, že dĺžka úsečky AC je

$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |CD|^2} = \sqrt{(5\text{ cm})^2 + (12\text{ cm})^2} = 13\text{ cm}.$$

Obsah trojuholníka ADC môžeme vypočítať dvomi spôsobmi:

$$\frac{|AD|\cdot|CD|}{2} = S_{\triangle ADC} = \frac{|AC|\cdot|SD|}{2}.$$

Úpravou a dosadením známych hodnôt dostaneme, že platí

$$|SD| = \frac{|AD|\cdot|CD|}{|AC|} = \frac{5\text{ cm}\cdot 12\text{ cm}}{13\text{ cm}} = \frac{60}{13}\text{ cm}.$$

Potom už ľahko (vzhľadom na symetriu) dopočítame, že

$$|BD| = 2\cdot|SD| = \frac{120}{13}\text{ cm}.$$

Uhlopriečky štvoruholníka majú veľkosť 13 cm a $\frac{120}{13}$ cm.

9. Dokážte, že v trojuholníku ABC pri štandardnom označení platí:

$$t_a + t_b + t_c > \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Riešenie: Stredy strán BC (CA, AB) označme S_1 (S_2, S_3). Z trojuholníkov ABS_1, BCS_2, CAS_3 vyplývajú na základe trojuholníkovej nerovnosti tieto nerovnosti:

$$t_a + \frac{a}{2} > c \quad\Rightarrow\quad t_a > c - \frac{a}{2},$$
$$t_b + \frac{b}{2} > a \quad\Rightarrow\quad t_b > a - \frac{b}{2},$$
$$t_c + \frac{c}{2} > b \quad\Rightarrow\quad t_c > b - \frac{c}{2}.$$

Po sčítaní nerovností na pravej strane a úprave dostávame požadované tvrdenie

$$t_a + t_b + t_c > \frac{1}{2}(a+b+c).$$

10. Dokážte, že ak máme zadaných 9 mrežových bodov v priestore, potom existujú aspoň dva z nich také, že aj stred úsečky nimi určenej je mrežový bod.

Riešenie: Každý bod v priestore je charakterizovaný trojicou súradníc. Mrežové body majú všetky tri súradnice celočíselné. Súradnice stredu úsečky vypočítame tak, že urobíme aritmetický priemer príslušných súradníc jej krajných bodov (x-ová súradnica stredu úsečky sa rovná aritmetickému priemeru x-ových súradníc krajných bodov úsečky, podobne pre súradnice y a z). Ak chceme, aby mal stred úsečky celočíselné súradnice, musia mať x-ové, y-ové aj z-ové súradnice jej krajných bodov rovnakú paritu (potom je ich súčet párny a po delení dvomi dostaneme celé číslo).

Na základe Dirichletovho princípu vieme, že aspoň 5 z 9 daných bodov má rovnakú paritu x-ovej súradnice. Z týchto bodov aspoň 3 majú rovnakú paritu y-ovej súradnice. No a z týchto troch bodov aspoň dva majú rovnakú paritu aj z-ovej súradnice, teda majú všetky tri súradnice rovnakej parity (parita môže byť pre každú súradnicu iná). Na základe vyššie uvedeného súradnice stredu úsečky určenej týmito dvoma bodmi (ak ich je viacero, tak vyberieme ľubovoľné dva z nich) sú celočíselné, a teda ide o mrežový bod.

11. Zistite, či existuje množina 4 032 takých prirodzených čísel, že súčet čísel ľubovoľnej 2 017-prvkovej podmnožiny tejto množiny nie je deliteľný číslom 2 017.

Riešenie: Taká množina existuje – zvoľme si 2 016 prirodzených čísel, ktoré sú deliteľné číslom 2 017 (napríklad $2\,017 \cdot k$, kde k nadobúda hodnoty 1 až 2 016) a 2 016 ľubovoľných prirodzených čísel, ktoré dávajú po delení číslom 2 017 zvyšok 1 (napríklad $2\,017 \cdot k + 1$, kde k nadobúda hodnoty 1 až 2 016). Keď vyberieme ľubovoľných 2 017 prvkov z tejto množiny, tak počet p vybraných čísel, ktoré dávajú zvyšok 1 po delení číslom 2 017, bude medzi 1 (pretože aspoň jedno také číslo vybrať musíme, keďže čísel deliteľných 2 017 je len 2 016) a 2 016 (toľko ich v danej množine je). To ale znamená, že ich súčet bude dávať po delení 2 017 zvyšok p, a teda nebude deliteľný 2 017.