MATMIX

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Z veľkej kopy kociek Janko postavil kváder. Marienka bola zvedavá, koľko kociek použil na stavbu kvádra a ako kváder vlastne vyzerá, ale Janko jej ho nechcel ukázať. Povedal jej len to, koľko kociek vidno pri pohľade z jednotlivých strán: pri pohľade spredu vidno 270 kociek, pri pohľade zboku vidno 360 kociek, pri pohľade zhora vidno 432 kociek. Marienka na základe toho dokázala určiť rozmery Jankovho kvádra. Určte ich aj vy.

Riešenie: Počet kociek, ktoré vidno z každej strany, predstavuje súčin počtov kociek, ktoré tvoria jeho hrany (ak označíme dĺžky hrán v jednotkových kockách ako a, b, c, potom čísla v zadaní predstavujú súčiny ab, bc, ca – nie nutne v tomto poradí). Ak vynásobíme všetky tri čísla zo zadania, dostaneme druhú mocninu objemu kvádra – súčinu všetkých dĺžok strán – $ab \cdot bc \cdot ca = (abc)^2$. Odtiaľ už ľahko vypočítame objem kvádra (abc) a potom jeho jednotlivé hrany.

Keďže platí $270 \cdot 360 \cdot 432 = 41\,990\,400 = 6\,480^2$, objem kvádra je 6 480 kociek. Dĺžky jednotlivých hrán potom vypočítame ako podiel objemu kvádra a počtu kociek na jednej stene (napr. $abc : bc = a$):

$$a = 6\,480 : 270 = 24,$$

$$b = 6\,480 : 360 = 18,$$

$$c = 6\,480 : 432 = 15.$$

Dĺžky hrán kvádra sú 15, 18 a 24 kociek.

2. Určte dĺžku a šírku obdĺžnikovej záhrady, ak platia podmienky: Keby šírka zostala taká, aká je, a dĺžka by bola 30 metrov, bol by obsah o 120 m^2 menší než v skutočnosti. Pri nezmenenej šírke a dĺžke 40 metrov by záhrada mala o 80 m^2 väčší obsah, než skutočne má.

Riešenie: Označme si dĺžku záhrady v metroch ako d a šírku ako s (tiež v metroch). Potom podľa zadania platí:

$$s \cdot 30 = s \cdot d - 120,$$

$$s \cdot 40 = s \cdot d + 80.$$

Odčítaním prvej rovnice od druhej dostávame, že platí $10s = 200$, teda $s = 20$. Dosadením do prvej z predchádzajúcich dvoch rovníc dostaneme, že platí $600 = 20d - 120$, odkiaľ vypočítame, že $d = 36$. Záhrada má dĺžku 36 metrov a šírku 20 metrov.

3. Na tabuli je napísaných niekoľko rôznych prirodzených čísel menších ako 100. Vieme o nich, že súčet žiadnych dvoch z nich sa nerovná 150. Koľko čísel môže byť napísaných na tabuli?

Riešenie: Na tabuli môžu byť napísané čísla 1 – 50, pretože ak by sme k nim pričítali ľubovoľné iné číslo na tabuli, tak by sme dostali súčet maximálne 149, pretože všetky čísla na tabuli sú menšie ako 100. Týchto čísel je 50.

Podobne tam môže byť aj číslo 75, pretože druhýkrát tam už byť napísané nemôže.

Uvažujme teraz nasledujúce páry čísel: 51 – 99, 52 – 98, ..., 76 – 74. Z každého páru môže byť na tabuli napísané len jedno číslo, pretože ak by tam bolo aj to druhé, dostali by sme pár so súčtom 150. Týchto párov je 26, takže celkový maximálny počet čísel na tabuli je 77.

4. Z látky tvaru obdĺžnika s rozmermi 110 cm x 80 cm potrebujeme vystrihnúť 30 rovnakých štvorcov. Určte, akú môžu mať najdlhšiu stranu.

Riešenie: Najprv si vypočítame obsah obdĺžnika – je to $110\ \text{cm} \cdot 80\ \text{cm} = 8\,800\ \text{cm}^2$. Ak má byť štvorcov 30, obsah každého z nich bude maximálne $8\,800\ \text{cm}^2 : 30 = 293{,}\overline{3}\ \text{cm}^2$.

Dĺžka strany štvorca bude potom maximálne

$$\sqrt{293{,}\overline{3}\ \text{cm}^2} \doteq 17{,}1\ \text{cm}.$$

Ak by bola dĺžka jeho strany väčšia ako 16 cm, tak v smere kratšej strany obdĺžnika dlhej 80 cm sa zmestia maximálne 4 štvorce ($80 : 5 = 16$) a v smere dlhšej ich bude určite menej ako 7 ($110 : 7 \doteq 15{,}7 < 16$), teda dokopy by ich bolo maximálne $4 \cdot 7 = 28$, čo je menej ako 30. Preto dĺžka strany štvorca bude maximálne 16 cm. Pre túto dĺžku už vieme obdĺžnik rozdeliť na 5 x 6 štvorcov s dĺžkou strany 16 cm (a ešte ostane pásik s rozmermi 80 cm x 14 cm). Najdlhšia strana štvorca s požadovanou vlastnosťou je preto 16 cm.

5. V továrni mala každá z troch dielní vyrobiť rovnaký počet výrobkov. Prvá dielňa prekročila plán o 24 %, druhá o 18,5 % a tretej dielni chýbalo do splnenia plánu 15 %. Všetky tri dielne vyrobili spolu 2 620 výrobkov. Koľko výrobkov mala vyrobiť každá dielňa a koľko výrobkov skutočne vyrobila každá dielňa?

Riešenie: Označme plán p. Prvá dielňa vyrobila $1{,}24p$ výrobkov, druhá $1{,}185p$ a tretia $0{,}85p$. Spolu vyrobili $1{,}24p + 1{,}185p + 0{,}85p = 3{,}275p$ výrobkov. Dostávame tak lineárnu rovnicu $3{,}275p = 2\,620$, odkiaľ dostaneme, že $p = 800$, teda každá dielňa mala vyrobiť 800 výrobkov.

Na základe údajov v zadaní už ľahko dopočítame, že prvá dielňa vyrobila $1{,}24 \cdot 800 = 992$ výrobkov, druhá dielňa vyrobila $1{,}185 \cdot 800 = 948$ výrobkov a tretia dielňa vyrobila $0{,}85 \cdot 800 = 680$ výrobkov.

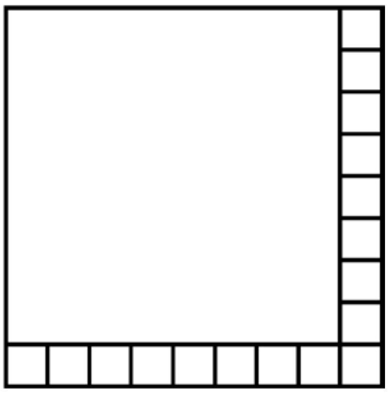
6. Peter si chcel urobiť výlet na bicykli. Našiel trasu dlhú 30 km. Keby vedel ísť v priemere o 5 km/h rýchlejšie, zvládol by túto trasu o 18 minút skôr. Aká bola jeho priemerná rýchlosť počas výletu na bicykli?

Riešenie: Ak označíme v rýchlosť Petra v kilometroch za hodinu, prešiel by trasu za $\frac{30}{v}$ hodín, ak by sa pohyboval o 5 km/h rýchlejšie, prešiel by trasu za $\frac{30}{v+5}$ hodín.

Zo zadania vieme, že platí
$$\frac{30}{v}-\frac{30}{v+5}=\frac{18}{60}.$$
Túto rovnicu vyriešime prenásobením menovateľmi a úpravou na kvadratickú rovnicu:
$$30\cdot(v+5)-30\cdot v=0,3\cdot v\cdot(v+5),$$
$$0=0,3v^2+1,5v-150,$$
$$v_{1,2}=\frac{-1,5\pm\sqrt{1,5^2-4\cdot 0,3\cdot(-150)}}{2\cdot 0,3},$$
$$v_1=20,$$
$$v_2=-25.$$
Záporný koreň nám nevyhovuje, preto bola rýchlosť Petra 20 km/h.

7. Štvorec S je rozdelený na 18 menších štvorcov, z ktorých 17 má stranu dĺžky 1. Aký obsah má štvorec S?

Riešenie: 18. štvorec, ktorý tvorí so 17 jednotkovými štvorcami štvorec S, musí mať celočíselnú dĺžku strany, pretože inak by nemohol spolu s jednotkovými štvorcami vyplniť iný štvorec – jednotkové štvorce sa musia úplne dotýkať aspoň jednej jeho strany. Ak označíme dĺžku jeho strany ako a, tak potom musia byť čísla a^2 aj a^2-17 druhými mocninami prirodzených čísel. Keďže $9^2-8^2=17$, nemôže byť dĺžka strany štvorca S väčšia ako 9. Zároveň sme našli prvé riešenie – štvorec S má obsah 81 a je rozdelený na jeden štvorec s obsahom 64 a 17 jednotkových štvorcov okolo dvoch jeho strán:



Ak by boli jednotkové štvorce okolo celého 18. štvorca, bol by ich počet párny (štvornásobok počtu pri jednej strane plus štvornásobok pri vrcholoch), a teda by nemohol byť 17. Ak by boli pri 18. štvorci dva rady jednotkových štvorcov tak ako na obrázku, bol by ich počet párny. Ak by boli tri a viac, tak ich počet bude deliteľný týmto číslom, avšak 17 je prvočíslo, takže žiadna ďalšia možnosť už neexistuje.

Štvorec S má obsah 81.

8. Pre korene x_1, x_2 kvadratickej rovnice $x^2-3ax+a^2=0$ platí $x_1^2+x_2^2=1,75$. Určte a.

Riešenie: Na základe Viètových vzťahov vieme, že platí
$$x_1+x_2=3a,$$
$$x_1x_2=a^2.$$
Na základe vzťahu zo zadania po úprave dostaneme, že platí:
$$1,75=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(3a)^2-2a^2=7a^2,$$
$$0,25=a^2,$$
$$0,5=|a|.$$
Po odstránení absolútnej hodnoty dostaneme, že úloha má dve riešenia: $a_1=0,5$ a $a_2=-0,5$. Skúškou sa ľahko presvedčíme, že obe riešenia vyhovujú.

9. Dokážte, že z každej desaťprvkovej množiny dvojciferných čísel vieme vybrať také dve jej neprázdne disjunktné podmnožiny, že súčet ich prvkov bude rovnaký.

Riešenie: Najprv si uvedomme, že požiadavka na disjunktnosť množín nie je podstatná, pretože ak majú dve disjunktné množiny rovnaký súčet prvkov, tak ak do oboch pridáme nejaké ďalšie číslo, súčet prvkov bude v oboch množinách opäť rovnaký. A naopak, ak majú dve rôzne množiny rovnaký súčet prvkov, tak ak z nich odstránime spoločné prvky, tak dostaneme dve neprázdne množiny s rovnakým súčtom prvkov.

Ak má množina 10 prvkov, tak počet rôznych neprázdnych podmnožín, ktoré z nich vieme vytvoriť, je $2^{10}-1=1\,023$.

Súčty v týchto množinách môžu nadobúdať hodnoty od 10 (najmenšie dvojciferné číslo tvoriace jednoprvkovú množinu) po 945 (množina obsahujúca 10 najväčších dvojciferných čísel 90 – 99). To znamená, že máme maximálne 936 rôznych súčtov prvkov množín.

Na základe Dirichletovho princípu potom existujú dve rôzne podmnožiny, ktoré majú rovnaký súčet prvkov. Ak z týchto množín odstránime spoločné prvky, dostaneme dve disjunktné podmnožiny s požadovanou vlastnosťou (odstránením spoločných prvkov nedostaneme prázdnu množinu, pretože tieto dve množiny nie sú totožné), čo sme chceli dokázať.

10. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo n existujú prvočísla p a q také, že n delí ich rozdiel.

Riešenie: Uvažujme nasledujúcu postupnosť prirodzených čísel:
$$1+n, 1+2n, \ldots, 1+rn, \ldots$$
V tejto postupnosti sa nachádza nekonečne veľa prvočísel. Toto tvrdenie dokážeme sporom: Ak by ich bolo konečne veľa, tak za r by sme zvolili ich súčin a číslo $1+rn$ by nebolo deliteľné ani jedným z nich, teda by bolo prvočíslom väčším ako r, čo by bol spor s predpokladom.

Označme si ľubovoľné dve rôzne z týchto prvočísel ako p a q. Potom ich rozdiel bude deliteľný číslom n (existujú také prirodzené čísla a a b, že platí $p=1+an$, $q=1+bn$, a teda $p-q=n\cdot(a-b)$, teda n delí ich rozdiel).

Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Šesť chlapcov bolo na brigáde. Peter a Pavol zarobili spolu 1 100 €, Pavol a Jozef 1 700 €, Jozef a Michal 1 100 €, Michal a Ján 3 300 €, Ján a Fero 5 300 €, Fero a Pavol zarobili 3 200 €. Koľko zarobil ktorý chlapec na brigáde?

2. Za jednotlivé písmená dosaďte číslice 0 až 9 tak, aby platilo nasledujúce sčítanie (za rôzne písmená rôzne číslice):

```
TWENTY
TWENTY
TWENTY
   TEN
   TEN
------
EIGHTY
```

3. Piati kamaráti, A, B, C, D a E, majú taký zvyk, že denne striedajú kravaty. Vždy si zoberú tú, ktorú najdlhšie nemali. Každý z nich má aspoň dve kravaty, pričom ani jeden z nich ich nemá viac ako 11. Žiadny z nich nemá dve kravaty rovnakej farby, žiadni dvaja nevlastnia rovnaký počet kravát. Uvádzané údaje sú z predchádzajúceho roka:
   - 1. decembra mal A modrú, B a C červenú, D zelenú, E žltú kravatu.
   - 19. decembra mal D zelenú, E žltú, C modrú, ostatní dvaja červenú kravatu.
   - 23. decembra mal D bielu, 26. decembra žltú kravatu.
   - 11. decembra nosili kravaty vo farbách: žltá, červená, modrá, zelená a biela.
   - 31. 12 mal každý na sebe rovnakú kravatu ako 1. 12.

   Akú kravatu mal na sebe B 1. januára tohto roku?

4. Nájdite všetky sedemciferné čísla zostavené z ľubovoľných cifier, ktoré sa môžu opakovať s touto podmienkou: ak označíme zľava cifry postupne A, B, C, D, E, F, G, tak platí: $A - B = C$, $B - C = D$, $C - D = E$, $D - E = F$, $E - F = G$.

5. Súčet cifier trojciferného prirodzeného čísla x označíme y. Určte hodnotu x, ak viete, že $x + y$ a $x - y$ sú také prirodzené čísla, ktorých všetky cifry sú rovnaké.

6. Vlak prešiel vzdialenosť z mesta A do mesta B priemernou rýchlosťou 56 km/h. Po 90 minútach cesty touto rýchlosťou zo stanice A vlak pol hodiny stál. Aby sa podľa stanoveného času dostal do stanice B, musel prejsť zvyšnú vzdialenosť priemernou rýchlosťou 63 km/h. Vypočítajte vzdialenosť miest A a B.

7. Nájdite všetky riešenia nasledujúcej rovnice:
$$\frac{x+11}{2013}+\frac{x+9}{2015}+\frac{x+7}{2017}=\frac{x+2017}{7}+\frac{x+2015}{9}+\frac{x+2013}{11}$$

8. Dĺžka odvesny pravouhlého trojuholníka je 3 cm, polomer v písanej kružnice je 1 cm. Vypočítajte jeho obsah.

9. Daná je množina A všetkých prirodzených čísel, ktoré dávajú po delení číslom 18 zvyšok 2, a množina B všetkých prirodzených čísel, ktoré dávajú po delení číslom 19 zvyšok 1. Určte počet všetkých prirodzených čísel, ktoré patria do prieniku týchto dvoch množím a sú menšie ako 100 000.

10. Nech x a y sú reálne čísla väčšie ako 1. Nech a označuje logaritmus x pri základe y a b označuje logaritmus y pri základe x. Nájdite minimálnu hodnotu súčtu $a + b$.

11. Fibonacciho postupnosť $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná tak, že pre jej členy platí $F_0 = F_1 = 1$ a $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pre všetky prirodzené čísla n. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo k existuje člen tento postupnosti, ktorý končí aspoň k nulami.

12. Nech a, b, c sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom
$$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1},$$
pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré je číslo $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí nasledujúca nerovnosť:
$$\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n \cdot \left(n!\right)^2$$

Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 26. 2. 2018

O MATEMATIKE A MATEMATIKOCH

- *Nemožno byť skutočným matematikom a nebyť trochu aj básnikom. (K. Weierstrass)*
- *Matematik je podobne ako básnik alebo maliar tvorcom... Prvým hľadiskom je krása. (G. H. Hardy)*
- *My matematici sme tiež naozajstní a povolaní básnici, naviac ešte musíme to, čo sme vybásnili, dokázať. (L. Kronecker)*
- *Matematici sú básnici. Vyššia matematika sa dotýka tajomstva ako báseň. (O. Březina)*
- *Pravý matematik je sám od seba nadšencom. Bez nadšenia niet matematiky. (Novalis)*
- *Matematikom je ten, kto vie nachádzať analógie medzi jednotlivými tvrdeniami. (S. Banach)*
- *Cieľom matematikov je skúmanie tajomstiev myslenia. (A. Rényi)*
- *Matematik úplne abstrahuje do kvality predmetov a obsahu ich vzťahov. Má dočinenia iba s výpočtami a porovnaniami tých vzťahov medzi sebou. (C. F. Gauss)*
- *V matematike nie je menej logiky a krásy než v šachovej hre. Ale má jednu prednosť. Matematici nesúťažia o titul absolútneho majstra. (M. Euwe)*