## Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Šesť chlapcov bolo na brigáde. Peter a Pavol zarobili spolu 1 100 €, Pavol a Jozef 1 700 €, Jozef a Michal 1 100 €, Michal a Ján 3 300 €, Ján a Fero 5 300 €, Fero a Pavol zarobili 3 200 €. Koľko zarobil ktorý chlapec na brigáde?

2. Za jednotlivé písmená dosaďte číslice 0 až 9 tak, aby platilo nasledujúce sčítanie (za rôzne písmená rôzne číslice):

```
TWENTY
TWENTY
TWENTY
   TEN
   TEN
------
EIGHTY
```

3. Piati kamaráti, A, B, C, D a E, majú taký zvyk, že denne striedajú kravaty. Vždy si zoberú tú, ktorú najdlhšie nemali. Každý z nich má aspoň dve kravaty, pričom ani jeden z nich ich nemá viac ako 11. Žiadny z nich nemá dve kravaty rovnakej farby, žiadni dvaja nevlastnia rovnaký počet kravát. Uvádzané údaje sú z predchádzajúceho roka:
   - 1. decembra mal A modrú, B a C červenú, D zelenú, E žltú kravatu.
   - 19. decembra mal D zelenú, E žltú, C modrú, ostatní dvaja červenú kravatu.
   - 23. decembra mal D bielu, 26. decembra žltú kravatu.
   - 11. decembra nosili kravaty vo farbách: žltá, červená, modrá, zelená a biela.
   - 31. 12 mal každý na sebe rovnakú kravatu ako 1. 12.

   Akú kravatu mal na sebe B 1. januára tohto roku?

4. Nájdite všetky sedemciferné čísla zostavené z ľubovoľných cifier, ktoré sa môžu opakovať s touto podmienkou: ak označíme zľava cifry postupne $A, B, C, D, E, F, G$, tak platí: $A - B = C$, $B - C = D$, $C - D = E$, $D - E = F$, $E - F = G$.

5. Súčet cifier trojciferného prirodzeného čísla $x$ označíme $y$. Určte hodnotu $x$, ak viete, že $x + y$ a $x - y$ sú také prirodzené čísla, ktorých všetky cifry sú rovnaké.

6. Vlak prešiel vzdialenosť z mesta A do mesta B priemernou rýchlosťou 56 km/h. Po 90 minútach cesty touto rýchlosťou zo stanice A vlak pol hodiny stál. Aby sa podľa stanoveného času dostal do stanice B, musel prejsť zvyšnú vzdialenosť priemernou rýchlosťou 63 km/h. Vypočítajte vzdialenosť miest A a B.

7. Nájdite všetky riešenia nasledujúcej rovnice:
$$\frac{x+11}{2013}+\frac{x+9}{2015}+\frac{x+7}{2017}=\frac{x+2017}{7}+\frac{x+2015}{9}+\frac{x+2013}{11}$$

8. Dĺžka odvesny pravouhlého trojuholníka je 3 cm, polomer v písanej kružnice je 1 cm. Vypočítajte jeho obsah.

9. Daná je množina $A$ všetkých prirodzených čísel, ktoré dávajú po delení číslom 18 zvyšok 2, a množina $B$ všetkých prirodzených čísel, ktoré dávajú po delení číslom 19 zvyšok 1. Určte počet všetkých prirodzených čísel, ktoré patria do prieniku týchto dvoch množím a sú menšie ako 100 000.

10. Nech $x$ a $y$ sú reálne čísla väčšie ako 1. Nech $a$ označuje logaritmus $x$ pri základe $y$ a $b$ označuje logaritmus $y$ pri základe $x$. Nájdite minimálnu hodnotu súčtu $a + b$.

11. Fibonacciho postupnosť $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ je definovaná tak, že pre jej členy platí $F_0 = F_1 = 1$ a $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pre všetky prirodzené čísla $n$. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $k$ existuje člen tento postupnosti, ktorý končí aspoň $k$ nulami.

12. Nech $a$, $b$, $c$ sú kladné reálne čísla, ktorých súčin nie je väčší ako ich súčet. Dokážte, že potom platí nerovnosť
$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc.$$

13. Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom
$$a_{n+1} = 3a_n - a_{n-1},$$
pričom $a_1 = 20$, $a_2 = 30$. Nájdite všetky prirodzené čísla $n$, pre ktoré je číslo $5a_{n+1}a_n + 1$ druhou mocninou celého čísla.

14. Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla $n$ platí nasledujúca nerovnosť:
$$\left(2n^2 + 3n + 1\right)^n \geq 6^n \cdot \left(n!\right)^2$$

**Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 26. 2. 2018**

# O MATEMATIKE A MATEMATIKOCH

- *Nemožno byť skutočným matematikom a nebyť trochu aj básnikom. (K. Weierstrass)*
- *Matematik je podobne ako básnik alebo maliar tvorcom... Prvým hľadiskom je krása. (G. H. Hardy)*
- *My matematici sme tiež naozajstní a povolaní básnici, naviac ešte musíme to, čo sme vybásnili, dokázať. (L. Kronecker)*
- *Matematici sú básnici. Vyššia matematika sa dotýka tajomstva ako báseň. (O. Březina)*
- *Pravý matematik je sám od seba nadšencom. Bez nadšenia niet matematiky. (Novalis)*
- *Matematikom je ten, kto vie nachádzať analógie medzi jednotlivými tvrdeniami. (S. Banach)*
- *Cieľom matematikov je skúmanie tajomstiev myslenia. (A. Rényi)*
- *Matematik úplne abstrahuje do kvality predmetov a obsahu ich vzťahov. Má dočinenia iba s výpočtami a porovnaniami tých vzťahov medzi sebou. (C. F. Gauss)*
- *V matematike nie je menej logiky a krásy než v šachovej hre. Ale má jednu prednosť. Matematici nesúťažia o titul absolútneho majstra. (M. Euwe)*