MATMIX

Riešenia 3. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. Miloša sa pýtali, koľko žiakov je v ich triede. Odpovedal: „Ak zväčšíme počet žiakov našej triedy o 100 % a potom pridáme ešte polovicu počtu žiakov triedy, dostaneme 100.“ Koľko žiakov je v Milošovej triede?

Riešenie: Ak označíme počet žiakov Milošovej triedy ako m, potom dostávame, že má platiť $m + m + 0{,}5 \cdot m = 100$. Po úprave dostávame, že má platiť $2{,}5m = 100$, teda $m = 40$.

V Milošovej triede je 40 žiakov.

2. Naše digitálne hodinky ukazujú hodiny a minúty (sekundy neukazujú). Koľko času ubehne od polnoci, kým ukážu 23-krát číslicu 2? (Ukázať číslicu znamená, že v danej minúte je zobrazená na hodinkách na jednej zo štyroch pozícií, teda napríklad od 19:59 po 20:10 (vrátane) je dvojka zobrazená 12-krát.)

Riešenie: Úlohu môžeme jednoducho vyriešiť tak, že si vypíšeme jednotlivé časy a budeme počítať, koľkokrát sa v nich vyskytne číslica 2. Môžeme to spočítať aj inak: Na mieste minút sa za jednu hodinu vyskytne číslica 2 šesťkrát. A na mieste desaťminút desaťkrát, teda od polnoci do jednej hodiny sa zobrazí číslica dva 16-krát. Po jednej to budú časy 1:02, 1:12, 1:20, 1:21, 1:22 a 1:23. No a 1:23 je práve ten čas, kedy sa dvojka zobrazí 23. raz.

3. Bazén na kúpalisku je dlhý 50 m a široký 12,5 m. Na pláne mesta je znázornený ako obdĺžnik s obsahom 1 cm². Určte, v akej mierke je plán mesta.

Riešenie: Ak si bazén predstavíme ako obdĺžnik, tak jeho obsah je $50\ \text{m} \cdot 12{,}5\ \text{m} = 625\ \text{m}^2$. To predstavuje 6 250 000 cm². Keďže porovnávame plochy, mierka je potom

$$1 : \sqrt{\frac{6\,250\,000\ \text{cm}^2}{1\ \text{cm}^2}} = 1 : 2\,500.$$

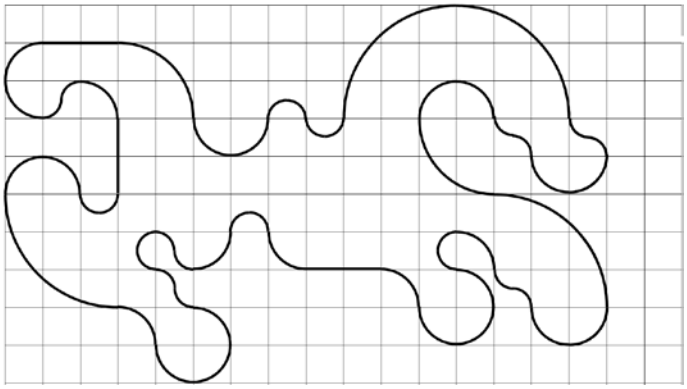
4. Aby sme si mohli pripraviť pukance, je potrebné na jar zasiať na polia semená kukurice pukancovej. Jeden kilogram kukuričných zŕn ich obsahuje približne 6 500 kusov. Hustota porastu kukurice je 80 000 rastlín na jeden hektár poľa. Pri siatí treba brať do úvahy aj to, že nie všetky zasadené zrná vyklíčia, takže dobrý poľnohospodár vyseje približne o 15 % zŕn viac oproti očakávanému počtu rastlín. Na siatie kukurice má k dispozícii sejačku, ktorá naraz seje v pásoch širokých 5 metrov. Keďže sa pohybuje po poli, jej priemerná rýchlosť je 4 km/h. Čas potrebný na otáčanie sejačky na konci poľa je už zahrnutý v jej priemernej rýchlosti. Koľko kukurice pukancovej má dobrý poľnohospodár kúpiť, ak chce zasiať kukuricu na poli s rozmermi 500 metrov x 600 metrov? Koľko hodín bude trvať vysiatie kukurice pomocou sejačky na celé pole?

Riešenie: Rozloha poľa je $500\ \text{m} \cdot 600\ \text{m} = 300\,000\ \text{m}^2$, čo je 30 hektárov. Na tejto ploche by malo rásť $80\,000 \cdot 30 = 2\,400\,000$ rastlín kukurice pukancovej. Keďže dobrý poľnohospodár počíta aj s rezervou vo výške 15 %, bude potrebovať $2\,400\,000 \cdot 1{,}15 = 2\,760\,000$ zŕn kukurice. Keďže jeden kilogram kukurice obsahuje 6 500 zŕn, bude jej potrebovať $2\,760\,000 : 6\,500 \doteq 424{,}62$ kg.

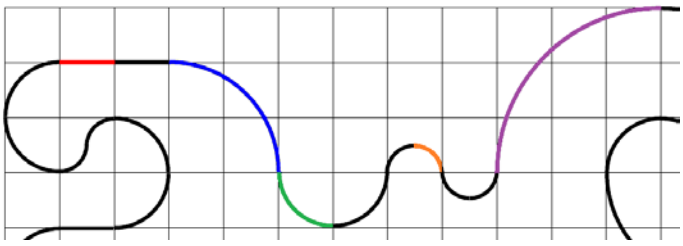
Za jednu hodinu sejačka prejde 4 km, teda 4 000 m, a oseje plochu $4\,000\ \text{m} \cdot 5\ \text{m} = 20\,000\ \text{m}^2$. Keďže rozloha poľa je 300 000 m², bude jej to trvať

$$300\,000\ \text{m}^2 : 20\,000\ \text{m}^2 / \text{h} = 15\ \text{h}.$$

5. Na obrázku je znázornená pretekárska dráha (jeden štvorček má stranu dlhú 50 metrov), ktorá sa nachádza na rovine (nie je klopená). Vypočítajte dĺžku okruhu v metroch.



Riešenie: Okruh pozostáva z viacerých úsekov, ktoré majú tvar kružnicového oblúka alebo úsečky. Rovných úsekov je 6 (červená farba na obrázku nižšie). Ostatné úseky sú tvorené zo štvrťkružníc s polomermi 25 m, 50 m, 100 m a 150 m. Úsekov (štvrťkružníc) s polomerom krivosti 25 m (oranžová) je 24. Úsekov s polomerom krivosti 50 m (zelená) je 24. Úseky s polomerom krivosti 100 m (modrá) sú 2. Úseky s polomerom krivosti 150 m (fialová) sú 4.



Dĺžka jedného rovného úseku je 50 m.

Dĺžka štvrťkružnice s polomerom krivosti 25 m je

$$\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 25\ \text{m} = 12{,}5\pi\ \text{m}.$$

Dĺžka štvrťkružnice s polomerom krivosti 50 m je

$$\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 50\ \text{m} = 25\pi\ \text{m}.$$

Dĺžka štvrťkružnice s polomerom krivosti 100 m je

$$\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 100\ \text{m} = 50\pi\ \text{m}.$$

Dĺžka štvrťkružnice s polomerom krivosti 150 m je

$$\frac{1}{4}\cdot 2\cdot\pi\cdot 150\ \text{m} = 75\pi\ \text{m}.$$

Celková dĺžka dráhy sa potom rovná

$$6\cdot 50\ \text{m} + 24\cdot 12{,}5\pi\ \text{m} + 24\cdot 25\pi\ \text{m} + 2\cdot 50\pi\ \text{m} + 4\cdot 75\pi\ \text{m} =$$
$$= (300 + 1\,300\pi)\ \text{m} \doteq 4\,384\ \text{m}.$$

Celková dĺžka dráhy je 4 384 metrov. Ak by sme použili menej presnú približnú hodnotu $\pi = 3{,}14$, dostali by sme dĺžku dráhy 4 382 metrov.

6. Aký uhol zviera hodinová a minútová ručička klasických hodín presne o 13:12?

Riešenie: Vypočítame si, aký uhol zvierajú obe ručičky s ich polohou v čase 12:00. Túto pozíciu ručičiek nazveme základná a veľkosť uhla otočenia ručičiek v nej bude 0°.

Keďže minútová ručička prejde celým ciferníkom za 60 minút, za jednu minútu sa otočí o uhol $360° : 60 = 6°$. Za 12 aj 72 minút preto bude zvierať so základnou pozíciou uhol $12\cdot 6° = 72°$. Hodinová ručička prejde celým ciferníkom za $12\cdot 60 = 720$ minút, za jednu minútu sa otočí o uhol $360° : 720 = 0{,}5°$. Za 72 minút (čas medzi 12:00 a 13:12) preto bude zvierať so základnou pozíciou uhol $72\cdot 0{,}5° = 36°$. O 13:12 preto budú ručičky zvierať uhol $72° - 36° = 36°$.

7. Máme k dispozícii dve vedrá. Jedno 17-litrové a druhé 9-litrové a neobmedzený zdroj vody. Dá sa do 17-litrového vedra naplniť presne 13 litrov vody? Ak áno, ako?

Riešenie: Dá sa to napríklad takto: Do prázdneho 17-litrového vedra nalejeme 9-litrovým vedrom 9 litrov vody a potom ešte raz 8 litrov vody, aby sa naplnilo. V 9-litrovom vedre ostal 1 liter vody. 17-litrové vedro vylejeme a prelejeme doň 1 liter vody z 9-litrového vedra. To naplníme a nalejeme 9 litrov vody do 17-litrového vedra. Je v ňom 10 litrov vody. Opäť naplníme 9-litrové vedro a dolejeme doplna 17-litrové vedro. V 9-litrovom vedre nám zostanú 2 litre vody. 17-litrové vedro vylejeme a prelejeme doň 2 litre vody z 9-litrového vedra. To naplníme a nalejeme 9 litrov vody do 17-litrového vedra. Je v ňom 11 litrov vody. Opäť naplníme 9-litrové vedro a dolejeme doplna 17-litrové vedro. V 9-litrovom vedre nám zostanú 3 litre vody. 17-litrové vedro vylejeme a prelejeme doň 3 litre vody z 9-litrového vedra. To naplníme a nalejeme 9 litrov vody do 17-litrového vedra. Je v ňom 12 litrov vody. Opäť naplníme 9-litrové vedro a dolejeme doplna 17-litrové vedro. V 9-litrovom vedre nám zostanú 4 litre vody. 17-litrové vedro vylejeme a prelejeme doň 4 litre vody z 9-litrového vedra. To naplníme a nalejeme 9 litrov vody do 17-litrového vedra. Teraz v ňom bude 13 litrov vody.

8. Číslo 700 245 sa dá rozložiť na súčin troch dvojciferných čísel. Určte tieto tri čísla.

Riešenie: Rozložením čísla 700 245 na súčin prvočísel dostávame, že platí $700\,245 = 3^4\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 19$.

Ak by bolo jedno z hľadaných troch čísel maximálne 70, bol by celkový súčin určite menší ako $70\cdot 100\cdot 100 = 700\,000$, čo je spor s predpokladom, že číslo 700 245 sa dá rozložiť na súčin troch dvojciferných čísel. Preto je každé z čísel rozkladu väčšie ako 70. Prvočíslo 19 musíme vynásobiť takým prvočíslom (alebo ich súčinom), aby bol výsledok medzi 70 a 100. Ak použijeme 3, dostávame 57, čo je menej ako 70. Ak použijeme 5, dostávame súčin 95, ktorý vyhovuje. Pri násobení číslom väčším ako 5 dostávame hodnotu väčšiu ako 100, čo nevyhovuje. Preto je prvým hľadaným číslom 95. Podobne pre 13 dostávame pri násobení trojkou 39, sedmičkou 91 a aspoň osmičkou aspoň 104, preto vyhovuje len 91. Potom tretie číslo musí byť 81. Úloha má jediné riešenie: 81, 91, 95.

9. Nájdite všetky celočíselné riešenia rovnice

$$xy = 20 - 3x + y.$$

Riešenie: Túto rovnicu môžeme ekvivalentnými úpravami upraviť na tvar

$$(x-1)\cdot(y+3) = 17.$$

Keďže hľadáme celočíselné riešenia, tak aj výrazy v zátvorkách budú celočíselné. Keďže 17 vieme dostať ako súčin dvoch celých čísel, pričom nám záleží na poradí činiteľov, práve štyrmi spôsobmi, dostávame 4 riešenia úlohy v nasledujúcej tabuľke:

Rozklad 17	$x-1$	$y+3$	x	y
$17 = 1\cdot 17$	1	17	2	14
$17 = 17\cdot 1$	17	1	18	–2
$17 = (-1)\cdot(-17)$	–1	–17	0	–20
$17 = (-17)\cdot(-1)$	–17	–1	–16	–4

10. Šesť družstiev sa zúčastnilo turnaja, ktorý sa hral systémom „každý s každým jeden zápas“. Turnaj trval dva dni. Dokážte, že existujú tri družstvá, ktoré odohrali všetky svoje vzájomné zápasy v jeden deň.

Riešenie: Každé družstvo hralo päť zápasov, teda existuje také družstvo, ktoré odohralo aspoň tri zápasy v jeden deň, pretože keby odohralo denne najviac dva, boli by to len štyri zápasy. Označme toto družstvo A a deň d. Ďalej nech súperi družstva A v deň d sú B, C, D. Skúmame vzájomné zápasy týchto štyroch družstiev. V deň d sa zohrali zápasy A – B, A – C, A – D. Súperi družstva A zohrali ešte v dvoch dňoch zápasy medzi sebou, teda B – C, B – D, C – D. Ak sa ani jeden z týchto zápasov nehral v deň d, máme tri družstvá B, C, D, ktoré odohrali svoje vzájomné zápasy v iný deň ako v deň d. Ak sa aspoň jeden z uvedených zápasov hral v deň d, spolu s dvoma zápasmi so súperom A máme všetky zápasy troch družstiev odohrané v deň d. Ak by napríklad B – C odohrali zápas v deň d, v tom dni sa odohrajú všetky vzájomné zápasy družstiev A, B, C. Teda v každom prípade existujú také tri družstvá, ktoré odohrali všetky vzájomné zápasy v jeden deň.