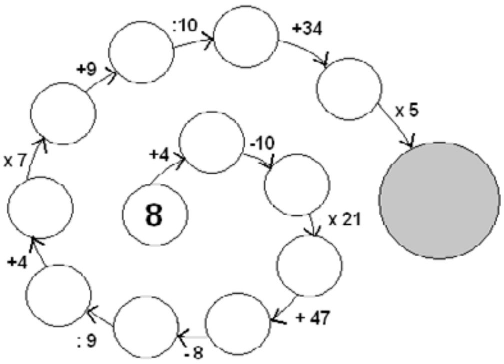
MATMIX

Riešenia 1. série úloh korešpondenčnej súťaže

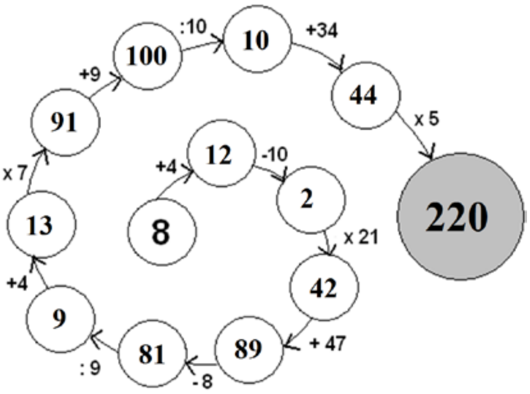
1. Juraj zjedol 100 koláčov za 5 dní. Každý deň okrem prvého zjedol o šesť koláčov viac ako deň predtým. Koľko koláčov zjedol prvý deň?

Riešenie: Ak označíme počet koláčov, ktoré zjedol Juraj prvý deň, ako x, potom druhý deň zjedol $x + 6$, tretí deň $x + 12$, štvrtý deň $x + 18$ a piaty deň $x + 24$. Potom musí platiť $x+(x+6)+(x+12)+(x+18)+(x+24)=100$. Túto lineárnu rovnicu upravíme na tvar $5x+60=100$, odkiaľ dostaneme, že $x=8$. Juraj zjedol prvý deň 8 koláčov.

2. Doplň do krúžkov čísla podľa šípok. Aké číslo bude v sivom kruhu?



Riešenie: Postupným výpočtom dostaneme nasledujúce hodnoty v krúžkoch:

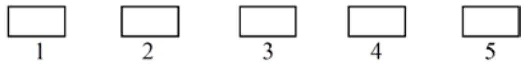


Hodnota v poslednom sivom kruhu je 220.

3. Záhrada tvaru obdĺžnika má obvod 320 m. Dĺžka záhrady je k šírke v pomere 3 : 2. Koľko ovocných stromov môžeme vysadiť do záhrady, ak sa na jeden strom počíta 16 m² plochy?

Riešenie: Ak označíme šírku záhrady $2x$, tak jej dĺžka bude $3x$ a obvod $10x$. Potom $x=32$, a teda rozmery záhrady sú 64 m x 96 m. Jej plocha je $64 \text{ m} \cdot 96 \text{ m} = 6\,144 \text{ m}^2$. Vysadiť do nej môžeme $6\,144 : 16 = 384$ stromov.

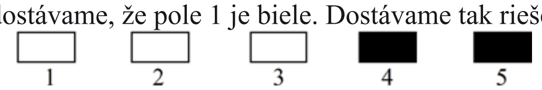
4. Na obrázku je 5 očíslovaných polí. Niektoré sú biele, ostatné čierne.



Zistite farbu každého poľa, ak viete, že súčasne platí:
   a) aspoň jedno z polí 1, 3 je biele,
   b) z polí 2, 5 je práve jedno čierne,
   c) polia 2, 3 majú rovnakú farbu,
   d) polia 3, 4 sú rozličnej farby,
   e) najviac jedno z polí 1, 5 je čierne.

Riešenie: Ak je pole 2 čierne, potom z podmienky b dostávame, že pole 5 je biele. Z podmienky c dostávame, že pole 3 je čierne, a teda pole 1 je biele podľa podmienky a. Z podmienky d dostávame, že pole 4 je biele. Dostávame tak nasledujúce riešenie:

Ak je pole 2 biele, potom z podmienky b dostávame, že pole 5 je čierne. Z podmienky c dostávame, že pole 3 je biele. Z podmienky d dostávame, že pole 4 je čierne. Z podmienky e dostávame, že pole 1 je biele. Dostávame tak riešenie:



5. Kedy si môžeš kúpiť viac zmrzliny – keď ti zvýšia vreckové o 10 % a cena zmrzliny zostane nezmenená, alebo keď sa nezmení tvoje vreckové a cena zmrzliny sa zníži o 10 %?

Riešenie: Ak je vreckové napr. 10 € a cena zmrzliny 1 €, môžem si kúpiť 10 zmrzlín. Ak mi zvýšia vreckové o 10 %, dostanem 11 €, a kúpim si 11 zmrzlín. Ak sa zníži cena zmrzliny o 10 %, zmrzlina bude stáť 0,9 € a budem si môcť kúpiť 11 zmrzlín a ešte mi 0,1 € zostane. Táto možnosť je preto výhodnejšia. Vo všeobecnosti postupujeme rovnako a využijeme to, že platí $\frac{1}{0{,}9} > 1{,}1$.

6. V rovnobežníku $ABCD$ platí: $|AB| = 10$ cm, $|AC| = 15$ cm a vzdialenosť bodu D od priamky AC je 2 cm. Určte vzdialenosť bodu D od priamky AB.

Riešenie: Keďže vzdialenosť bodu D od priamky AC je 2 cm, predstavuje táto hodnota aj dĺžku výšky z bodu D v trojuholníku ACD. Potom má obsah tohto trojuholníka hodnotu

$$S_1 = \frac{15 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm}}{2} = 15 \text{ cm}^2.$$

Keďže v rovnobežníku sú trojuholníky ACD a CAB zhodné, je obsah S rovnobežníka 30 cm². Ten ale vieme vypočítať ako $S = |AB| \cdot v_{AB}$, takže po dosadení známej hodnoty obsahu a veľkosti úsečky AB dostaneme, že platí

$$v_{AB} = \frac{30 \text{ cm}^2}{10 \text{ cm}} = 3 \text{ cm}.$$

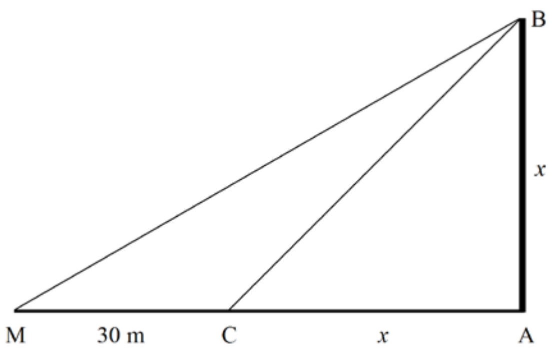
To je zároveň aj vzdialenosť bodu D od priamky AB.

7. Na vysokej škole urobí skúšku v prvom termíne 60 % študentov. V druhom termíne ju urobí 65 % z tých, ktorí ju neurobili v prvom termíne. Tretí termín má najnižšiu úspešnosť – skúšku v ňom zvládne len 45 % študentov. Koľko študentov neurobí skúšku ani v jednom z troch termínov?

Riešenie: Označme počet študentov, ktorí robia danú skúšku, ako x. V prvom termíne ju neurobí $0{,}4x$ študentov. V druhom termíne ju neurobí $0{,}4x \cdot 0{,}35 = 0{,}14x$ študentov. Ani v treťom termíne ju neurobí $0{,}14x \cdot 0{,}55 = 0{,}077x$ študentov, teda 7,7 % študentov neurobí skúšku ani v jednom z troch termínov.

8. Z miesta M na zemi vidíme vrchol budovy pod uhlom 30°. Ak sa priblížime k budove o 30 m po rovine, vidíme jej vrchol pod uhlom 45°. Vypočítajte výšku budovy.

Riešenie: Nakreslíme si situáciu – bod B predstavuje vrchol budovy, bod A predstavuje pätu priemetu vrcholu budovy na zem, bod C predstavuje miesto po priblížení o 30 metrov k budove. Výšku budovy označíme x.



Keďže po priblížení o 30 metrov vidno vrchol budovy pod uhlom 45°, trojuholník ABC je pravouhlý rovnoramenný so základňou BC. V trojuholníku ABM využijeme funkciu tangens a dostaneme, že platí:

$$\operatorname{tg}(\angle \text{BMA}) = \frac{|AB|}{|AM|}.$$

Dosadením známych hodnôt postupne dostaneme, že platí:

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{x}{30 \text{ m} + x},$$

$$x = \frac{(30 \text{ m}) \cdot \operatorname{tg} 30°}{1 - \operatorname{tg} 30°},$$

$$x = 15 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right) \text{ m}.$$

Výška budovy je $15 \cdot \left(1 + \sqrt{3}\right)$ m, čo je približne 40,98 m.

9. Peter si vytvoril svoju vlastnú postupnosť: začal číslom 2017 a každý ďalší člen postupnosti vytvoril tak, že umocnil cifru na mieste jednotiek predchádzajúceho člena postupnosti na druhú a k výsledku pripočítal číslo 2. Aké číslo je na 2018. mieste tejto postupnosti?

Riešenie: Vypíšme si jednotlivé členy tejto postupnosti: 2017, 51, 3, 11, 3, 11, 3... Vidíme, že od 3. člena sa už opakujú len dve hodnoty členov postupnosti – 3 (nepárne miesta) a 11 (párne miesta). Keďže 2018 je párne číslo, na 2018. mieste postupnosti bude číslo 11.

10. Babka a jej vnučka majú narodeniny v rovnaký deň. Počas šiestich po sebe idúcich oslavách narodenín bol babkin vek vždy deliteľný vekom vnučky. Určte, ktoré narodeniny oslavovala babka na poslednej z týchto šiestich osláv, ak viete, že ešte nedovŕšila vek 100 rokov.

Riešenie: Vek vnučky mohol byť pri prvej oslave buď 1 rok alebo ľubovoľné iné číslo. Ak by vek vnučky nebol 1 rok, babička by musela mať v každom roku neprvočíselný vek, pretože prvočíslo je deliteľné len jednotkou a sebou samým, takže keby babička mala prvočíselný vek, jej vek by nemohol byť deliteľný vekom vnučky, iba keby mala vnučka rovnako rokov ako ona (čo je nezmysel) alebo 1 rok. Ak mala vnučka pri prvej oslave 1 rok, babička mohla mať tento rok prvočíselný vek. Počas ostatných rokov by už však musela mať neprvočíselný vek.

Ak by vek vnučky nebol 1 rok, musíme nájsť 6 po sebe idúcich zložených čísel. Avšak preskúmaním všetkých prirodzených čísel menších ako 100 zistíme, že taká šestica čísel neexistuje. Platiť teda musí druhá možnosť a vnučka má pri prvých narodeninách zo šiestich 1 rok. Babička vtedy bude mať prvočíselný vek a počas ostatných narodenín neprvočíselný. Možnosti, kde sa nachádza päť po sebe idúcich zložených čísel nasledujúcich po prvočísle, sú nasledujúce: 23 – 28, 31 – 36, 53 – 58, 61 – 66, 73 – 78 a 91 – 96.

Tretie číslo je deliteľné trojkou už len v nasledujúcich šesticiach: 31 – 36, 61 – 66 a 91 – 96. Z týchto šestíc je štvrté číslo je deliteľné štvorkou jedine v prípade 61 – 66. Zostáva nám teda už len overiť či 65 je deliteľné 5 (áno) a 66 deliteľné 6 (áno). Babička teda na poslednej z šiestich osláv mala 66 rokov.

11. Kladné reálne čísla a, b, c majú takú vlastnosť, že pre každé prirodzené číslo n existuje trojuholník so stranami s dĺžkami a^n, b^n, c^n. Dokážte, že aspoň dve z čísel a, b, c sú rovnaké.

Riešenie: Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že existujú také čísla a, b, c, ktoré sú navzájom rôzne, pre ktoré platí, že pre každé prirodzené číslo n existuje trojuholník so stranami s dĺžkami a^n, b^n, c^n. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že platí $a < b < c$. Potom pre každé prirodzené číslo n platí aj $a^n < b^n < c^n$. Keďže pre každé prirodzené číslo n existuje trojuholník so stranami s dĺžkami a^n, b^n, c^n, bude preň platiť trojuholníková nerovnosť: $a^n + b^n > c^n$. Predelením tejto nerovnice kladným číslom b^n dostávame ekvivalentnú nerovnicu

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1 > \left(\frac{c}{b}\right)^n.$$

Podľa predpokladu však platí

$$\frac{a}{b} < 1 \text{ a } \frac{c}{b} > 1,$$

teda ľavá strana nerovnice má hodnotu menšiu ako 2, avšak pravá strana pre dostatočne veľké n bude mať hodnotu väčšiu ako 2 (ide o exponenciálnu funkciu premennej n so základom väčším ako 1). Dostali sme spor, a teda platí tvrdenie zo zadania úlohy.

12. Určte hodnotu súčtu

$$f(n) = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (2n-1)^2 - (2n)^2$$

pomocou n a konečného počtu operácií.

Riešenie: Pre každé prirodzené číslo k platí

$$(2k-1)^2 - (2k)^2 = 1 - 4k.$$

Dosadením tohto vzťahu do predpisu f dostávame, že platí

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n}\left[(2k-1)^2 - (2k)^2\right] = \sum_{k=1}^{n}(1-4k) =$$

$$= n - 4\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} = -2n^2 - n.$$

13. Dokážte, že ak je n nepárne prirodzené číslo, potom číslo $1^n + 2^n + \ldots + n^n$ je deliteľné n^2.

Riešenie: Prípad $n = 1$ je triviálny a tvrdenie preň platí (1 je deliteľná 1). Uvažujme ďalej n väčšie ako 1. Keďže n je nepárne prirodzené číslo väčšie ako 1, je aspoň 3, a teda n^n bude deliteľné n^2. Ostáva nám dokázať, že $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ je deliteľné n^2.

Teraz dokážeme, že pre každé prirodzené číslo $k = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$ platí, že $k^n + (n-k)^n$ je deliteľné n^2. Rozpísaním $(n-k)^n$ podľa binomickej vety a úpravou dostávame, že platí

$$(n-k)^n = n^2\cdot\left[n^{n-2} + \binom{n}{1}\cdot n^{n-3}\cdot(-k) + \cdots + \binom{n}{n-2}\cdot(-k)^{n-2}\right] +$$

$$+\binom{n}{n-1}\cdot n\cdot(-k)^{n-1} + (-k)^n.$$

Keďže n je nepárne prirodzené číslo, tak platí

$$k^n + (n-k)^n \equiv k^n + \binom{n}{n-1}\cdot n\cdot(-k)^{n-1} + (-k)^n =$$

$$= n^2\cdot(-k)^{n-1} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ n^2\right),$$

čo sme chceli dokázať.

14. Nech n a m sú prirodzené čísla, pričom platí $n \geq 2m$. Koľko existuje reťazcov dĺžky n zložených len z núl a jednotiek, ktoré obsahujú práve m blokov 01?

Riešenie: Ukážeme, že hľadaný počet reťazcov je

$$\binom{n+1}{2m+1}.$$

Uvažujme ľubovoľný vyhovujúci reťazec a v ňom sa pozrime na množinu všetkých dvojíc za sebou idúcich číslic, ktoré sú rôzne (teda ide o za sebou idúce dvojice číslic 01 a 10, ktoré budú tvoriť tzv. výmenu). Našou úlohou je zistiť počet reťazcov, ktoré obsahujú práve m blokov 01. Keďže bloky 01 a 10 sa musia striedať, ich počet sa môže líšiť maximálne o 1. Konkrétne, ak reťazec začína 1 a končí 0, tak počet blokov 10 je $m + 1$, ak reťazec začína 0 a končí 1, tak počet blokov 10 je $m - 1$, a ak reťazec začína a končí tou istou číslicou, tak počet blokov 10 je m. V prvom prípade je celkový počet výmen $2m + 1$ a dostávame tak pre ne

$$\binom{n-1}{2m+1} \text{ možností.}$$

Keďže výber výmenných bodov spolu so začiatočnou a koncovou číslicou jednoznačne určuje celý reťazec, dostávame jednoznačné určenie reťazca, ktorý obsahuje m blokov 01, $m + 1$ blokov 10, začína 1 a končí 0. Analogicky dostaneme, že vo zvyšných dvoch prípadoch je možností

$$\binom{n-1}{2m-1}, \text{ resp. } 2\cdot\binom{n-1}{2m}.$$

Celkový počet reťazcov tak je

$$\binom{n-1}{2m+1} + 2\cdot\binom{n-1}{2m} + \binom{n-1}{2m-1} = \binom{n}{2m} + \binom{n}{2m+1} = \binom{n+1}{2m+1}.$$

Zadania 2. série úloh korešpondenčnej súťaže

1. V autobuse je 8 ľudí – 7 dievčat a vodič. Každé dievča má práve jednu tašku. V každej taške je 7 veľkých mačiek, každá veľká mačka má 7 mačiatok. Všetky mačky majú po 4 nohy, všetci ľudia v autobuse po 2 nohy. Iní ľudia ani zvieratá sa v autobuse nenachádzajú. Koľko nôh je v autobuse?

2. Nájdite všetky reálne čísla x, pre ktoré platí:

$$\frac{1}{3x-6} = \frac{1}{2-x}$$

3. Na stôl sme položili vedľa seba tri poháriky tak, že prostredný je položený hore dnom, zvyšné dva sú položené normálne – dole dnom. Vašou úlohou je zdvihnúť vždy dva poháriky naraz, každý z nich otočiť naopak ako bol, a potom ich znova položiť na stôl tak, aby boli po práve štyroch zdvihnutiach a otočeniach všetky poháriky hore dnom. Ako to urobíte?

4. Michal má tri prútiky. Ich dĺžky sú 20 cm, 24 cm a 30 cm. Ako môže len pomocou týchto prútikov odmerať dĺžku 26 cm? (Prútiky nemôže rezať.)

5. O 18:00 zapadlo slnko a Peter si vo svojej pracovni zapálil dve sviečky. Biela sviečka je vysoká 30 cm a celá zhorí za 150 minút. Modrá sviečka je vysoká 48 cm a celá zhorí za 120 minút. O koľkej budú obe sviečky rovnako vysoké?

6. Petrova kocka s hranou dlhou 10 cm sa rozpadla na niekoľko kociek s hranami 2 cm a 3 cm. Na aký počet kociek sa mohla Petrova kocka rozpadnúť?

7. Športového turnaja sa zúčastnilo 6 družstiev, pričom každá dvojica družstiev zohrala štyri vzájomné zápasy. Žiaden zo zápasov neskončil remízou. Na konci turnaja sa zverejnilo, koľko percent svojich zápasov vyhrali jednotlivé družstvá. Bolo to 20 %, 30 %, 35 %, 60 % a 80 %. Chýbal len údaj

o družstve, ktoré získalo druhé miesto. Koľko percent svojich zápasov vyhralo toto družstvo?

8. V obdĺžniku $ABCD$ platí $|AB| = 12$ cm, $|BC| = 9$ cm. Na uhlopriečke BD je vyznačený bod E tak, že $|BE| = 5$ cm. Na strane AB je vyznačený bod F tak, že EF je rovnobežné s AD. Vypočítajte obvod štvoruholníka $AFED$ v centimetroch.

9. Vo futbalovej jedenástke mužstva je priemerný vek hráčov 23 rokov. Tréner dvoch najstarších 26-ročných hráčov vymenil za dvoch mladších, čím priemerný vek mužstva klesol na 22 rokov. Obaja noví hráči sa narodili v ten istý deň, rok po sebe. Koľko rokov majú noví hráči?

10. Vo vreci je 100 kartičiek, na ktorých sú napísané všetky prirodzené čísla od 1 do 100 (na každej kartičke je práve jedno číslo). Aký najmenší počet kartičiek musíme vytiahnuť, ak ťaháme so zatvorenými očami a chceme mať istotu, že medzi nimi budú tri kartičky také, že súčet čísel na nich napísaný je deliteľný troma?

11. Pri golfe boli jamky od seba vzdialené 150, 300, 250, 325, 275, 350, 225, 400 a 425 metrov. Robot Golfík sa dá nastaviť tak, aby odpaľoval loptičky na dve rôzne vzdialenosti. (Napr. keď ho nastavíme na odpaľovanie na vzdialenosti 4 a 10 metrov, poradí si hravo s jamkou vzdialenou 18 metrov – zvládne to na tri údery: 10, 4, 4; pri jamke vzdialenej 48 metrov potrebuje pri tomto nastavení aspoň 6 úderov: 10, 10, 10, 10, 4, 4.) Navrhnite, na aké vzdialenosti treba nastaviť Golfíka, aby mu na prejdenie cez všetkých deväť jamiek stačilo menej ako 35 úderov.

12. Nech pre členy nekonečnej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = -1$ a pre $n > 3$ definujme $a_n = a_{n-1}a_{n-3}$. Nájdite hodnotu $a_{2\,019}$.

13. Predpokladajme, že $x_1, x_2, \ldots, x_{2\,018}$ sú kladné reálne čísla, pre ktoré platí
$$\sqrt{x_1} + \sqrt{2x_2} + \ldots + \sqrt{2\,018x_{2\,018}} = 1.$$
Nájdite najmenšiu možnú hodnotu súčtu
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{2\,018}.$$

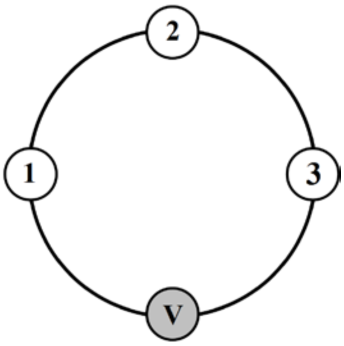
14. Zistite, či nasledujúci nekonečný rad konverguje a ak áno, nájdite jeho súčet:
$$\frac{1}{2^1+1} + \frac{2}{2^2+1} + \frac{4}{2^4+1} + \frac{8}{2^8+1} + \cdots$$

Termín odoslania riešení úloh 2. série: do 25. 2. 2019

TRI ÚLOHY Z PRAVDEPODOBNOSTI

O vlkovi a ovečkách

Na kružnici sú rovnomerne rozmiestnené tri ovečky a jeden vlk. Vlk sa pohybuje náhodne – s rovnakou pravdepodobnosťou (jedna polovica) sa každý deň vyberie z miesta, na ktorom sa nachádza, buď vpravo alebo vľavo po kružnici, pričom prejde štvrtinu obvodu kružnice. Ak sa na danom mieste nachádza ovečka, zožerie ju. Kam sa má postaviť múdra ovečka, ktorá chce prežiť čo najdlhšie (teda bude zožratá ako posledná)?



Riešenie: Ovečky označme 1, 2 a 3 podľa obrázka, počiatočnú pozíciu vlka V. Označme pravdepodobnosť, že ovečka číslo i bude zožratá ako posledná, ako p_i, $i = 1, 2, 3$.

Po dostatočnom počte dní sa pravdepodobnosť, že vlk navštívi všetky miesta, rovná 1. Preto platí prvá rovnica:
$$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$$
Zo symetrie vyplýva druhá rovnica: $p_1 = p_3$.

Na pravdepodobnosť, že posledná zožratá ovečka bude ovečka číslo 3, sa môžeme pozrieť aj inak – ide aj o jav, že posledná zožratá ovečka bude ovečka vpravo od súčasnej pozície vlka (analogicky pre ovečku číslo 1 – posledná zožratá ovečka bude ovečka vľavo od súčasnej pozície vlka).

Zamyslime sa teraz nad pravdepodobnosťou, že bude ako posledná zožratá ovečka číslo 2. V prvom kroku šiel vlk s pravdepodobnosťou 1/2 vpravo a zožral ovečku číslo 3. Teraz sa nachádza na pozícii 3 a ovečka 2 je vpravo od neho. Aby bola ovečka 2 posledná, musí vlk zožrať aj ovečku číslo 1, preto prázdne miesto, kde sa nachádzal na začiatku vlk, nijako neovplyvní to, že ovečka číslo 2 bude posledná, lebo vlk týmto miestom musí určite prejsť na ceste k ovečke číslo 1. Preto pravdepodobnosť, že ju zožerie ako poslednú, je p_3. Vlk však mohol ísť v prvom kroku s pravdepodobnosťou 1/2 aj vľavo. Potom je pravdepodobnosť, že ovečka číslo 2 bude posledná, p_1. Celkovo tak dostávame, že pre p_2 platí rovnica
$$p_2 = \frac{1}{2}\cdot p_1 + \frac{1}{2}\cdot p_3.$$

Dostali sme sústavu troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi. Jej vyriešením dostaneme, že
$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}.$$
teda múdra ovečka sa môže pokojne postaviť na ľubovoľné miesto, pretože vie, že na každom mieste je rovnaká pravdepodobnosť, že bude zožratá ako posledná.

Lukostrelci

Lukostrelci A a B spolu naraz vyrazia z bodu 0 a kráčajú rovnakou rýchlosťou po úsečke do bodu 1. Každý z nich chce zasiahnuť cieľ v bode 1 ako prvý. Každý z nich má len jeden šíp. Pravdepodobnosť, že A trafí cieľ po prejdení vzdialenosti x, je x. Pravdepodobnosť, že B trafí cieľ po prejdení vzdialenosti x, je x^2. Aká je optimálna stratégia pre oboch strelcov (v ktorom bode majú vystreliť)?